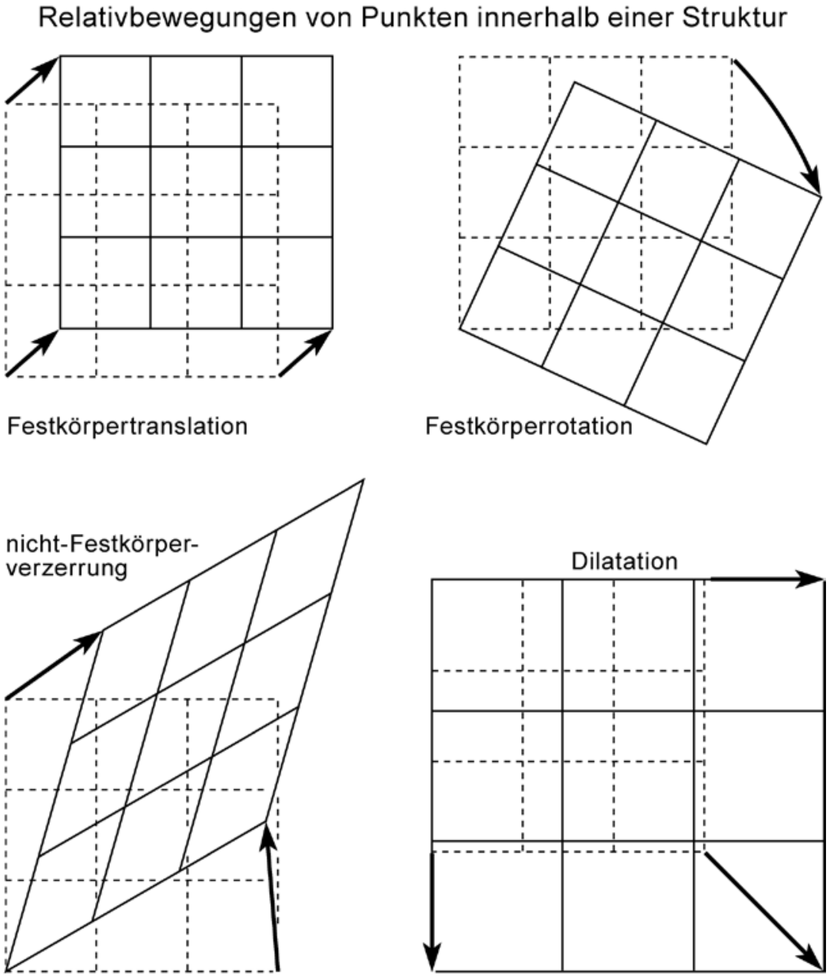
KONZEPT DER VERFORMUNG

Deformation umfasst jeden möglichen Prozess, der zu einer Änderung der Form, der Grösse oder der Position eines Körpers führt. Ein fester Körper, der äusseren Kräften ausgesetzt ist, tendiert dazu, sich zu bewegen oder seine Bewegung zu verändern. Diese Verschiebung kann vier verschiedene Komponenten beinhalten:
- 1) Ein Körper wird gezwungen, seine Position zu verändern; er erfährt eine **Translation**.
- 2) Ein Körper wird gezwungen, seine Orientierung zu verändern; er erfährt eine **Rotation**.
- 3) Ein Körper wird gezwungen, seine Grösse (oder Volumen) zu verändern; er erfährt eine **Dilatation** (*dilation*).
- 4) Ein Körper wird gezwungen, seine Form zu verändern; er erfährt eine **Verformung** (*distortion*).



Diese Bewegungskomponenten werden oft als **Rutschen** (*slip*) oder **Fliessen** (*flow*) bezeichnet. Die Unterscheidung ist vom Massstab abhängig. Rutschen beschreibt eine Bewegung auf einer diskreten Fläche, wohingegen Fliessen eine Bewegung darstellt, die das Gestein durchgehend als Ganzes erfasst, d.h. jeden Materialpunkt des Gesteins.
Diese vier grundlegenden Bewegungen können kombiniert werden.

- Während einer **Festkörperdeformation** (*rigid body deformation*) werden Gesteine derart versetzt und/oder rotiert, dass sie ihre ursprüngliche Grösse und Form beibehalten.
- Werden einige oder alle auf den Körper einwirkenden Kräfte vom Körper absorbiert anstatt ihn zu bewegen, dann wird der Körper **gespannt** (*stressed*). Die Kräfte bewirken dann eine Partikelbewegung innerhalb des Körpers, so dass der Körper seine Form und/oder Grösse verändert und somit **verformt** (*deformed*) wird. **Deformation** beschreibt die vollständige Transformation von der ursprünglichen auf die endgültige Geometrie und Lage eines Körpers.

Deformation produziert Diskontinuitäten in spröden Gesteinen. In duktilen Gesteinen ist Deformation makroskopisch zusammenhängend, verteilt innerhalb der Masse des Gesteins. Stattdessen umfasst die spröde Deformation im Wesentlichen Relativbewegungen zwischen unverformten (aber bewegten) Blöcken.

Verformung (*strain*) ist eine **nicht-Festkörperdeformation**, d.h. der Betrag der Bewegung zwischen Teilen eines Körpers infolge von Spannungseinwirkung. Folglich sind Spannung und Verformung voneinander abhängig. Diese Partikelversetzungen verursachen **Dilatation** (*dilatation* Änderung der Grösse, positiv für Dehnung und negativ für Verkürzung) und/oder **Verzerrung** *(distortion*, die Änderung der Form). Nach kumulativen Verformung(en) ist die Schlussform, das was die Geologen beobachten können. Verformung ist ein geometrisches Konzept, das den relativen Versatz und nachfolgende Änderung in der Konfiguration der Partikel in einer gegebenen Dimension des Körpers quantitativ bestimmen soll; d.h. Verformung messen ist Deformation quantifizieren von einer "ursprünglichen" Form aus zu einer "endgültigen" Form („Ursprung“ und „Ende“ können Zwischenschritte einer längeren Verformungsentwicklung sein). Die **Verformungsanalyse** *(strain analysis)* beschäftigt sich mit der quantitativen Bestimmung der Änderung von Form und Grösse aufgrund von Deformation. So stellt die Verformungsanalyse, die (1) Verformungsorientierung, (2) die Grösse der Verformung und (3) die Muster der Verformungsschwankung fest. **Finite Verformung** *(finite strain)* ist der messbare Parameter, der der Gesamtänderung der Form eines verformten Körpers relativ zu seiner Ursprungsform einen Wert zuordnet. Deswegen ist Verformung ein dimensionsloses Mass der Fliessmenge. Diese Information hilft den physikalischen Versatz zu verstehen, der die Strukturen produzieren liessen, die im Feld gesehen wurden. In der Praxis ist Dilatation sehr schwer zu messen, so dass die Geologen in der Regel von der Verformung nur im Sinne von Verzerrung sprechen.

Verformungsanalyse

Homogene – heterogene Verformung

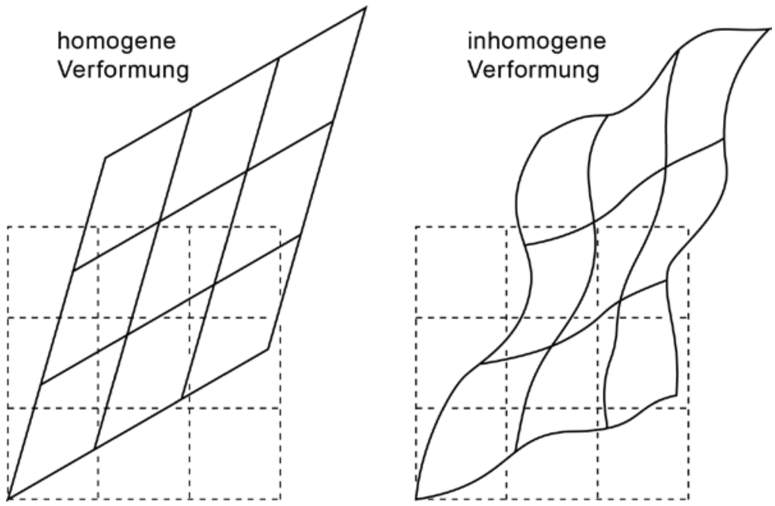
Das Konzept der finiten Verformung ist nützlich, wenn die Deformation als einheitlich und homogen betrachtet werden kann.

Definition

Eine Verformung ist homogen, wenn alle Teile eines Körpers eine Dilatation und/oder Verzerrung erleiden, die durch die gleiche Intensität, Art und Richtung des Versatzes charakterisiert wird. Typische Kriterien sind, dass:

- gerade und parallele Linien und Flächen gerade und parallel bleiben.
- Alle Linien mit derselben Richtung in einem Körper die gleiche Dehnung und Rotation durchlaufen.
- Kreise zu Ellipsen werden. Die im unverformten Körper eingeschlossenen Kugeln werden zu einem Ellipsoid.

Ist die Verformung im Körper unterschiedlich von Ort zu Ort, dann ist die Ausdehnung und/oder Verzerrung heterogen. Gerade Linien und Flächen werden gekrümmt und parallele Linien und Flächen bleiben nicht parallel. Kreise und Kugeln werden zu komplexen, geschlossenen Formen.



Diese Definition betont den wichtigen Unterschied zwischen Verformung und Struktur. Strukturen wie Falten oder Adern würden nicht ohne "geschichtete" Heterogenität, d.h. das Berühren unterschiedlicher Materialien, existieren. Im Falle heterogener Deformation kann man die Analyse auf kleinere homogene Gebiete beschränken. Eine homogene Deformation auf einem Massstab kann Teil einer heterogenen Deformation auf einem anderen Massstab sein. Heterogene Verformung mit unterschiedlichen Eigenschaften in den verschiedenen Teilen eines Gesteins oder einer Gesteinsmasse ist **verteilt** *(partitioned)*. Folglich beziehen sich Strukturen und Verformung auf verschiedene Bezugssysteme, möglicherweise geografisch für die Strukturen, lokal für die Verformung: das **Gefüge** (fabric) des Gesteins, das die Schieferung und die Streckungslineation umfasst.

Annahme des Kontinuums

Verformungskompatibilität ist die Bedingung damit Gesteine, während der Deformation kohärent bleiben. Jedoch können Linien und Flächen während einer inhomogenen und unterbrochenen Verformung auch zerbrochen werden. Die Verformungsschwankungen können am unterschiedlichen mechanischen Verhalten von Bestandteilen eines Gesteins oder einer Gesteinsverbindung liegen. Zum Beispiel kann die Anwesenheit von verhältnismässig steifen Bestandteilen dazu führen, dass die Verformung in schwächere Teile des Gesteins verteilt wird, anstatt gleichmässig im Gestein verteilt zu sein. Die Verformungsanalyse wird im Wesentlichen auf homogene und ununterbrochene Deformation (in Bezug auf den betrachteten Massstab) angewandt.

Fortschreitende Deformation bis zum Endzustand der Verformung

Fortschreitende Deformation (*progressive deformation*) bezieht sich auf eine Reihe von Bewegungen eines Körpers von seinem unverformten Anfangszustand zu seinem verformten Zustand. Progressive Verformung kann ununterbrochen oder unterbrochen sein.

Verformungspfad

Ein **Verformungszustand** (*state of strain*) eines Körpers ist die gesamte vom Körper aufgenommene Verformung bis hin zum Zeitpunkt der Messung, d.h. die Summe aller verschiedener Formen und Positionen, die vom Körper durchlaufen wurden.
Die Reihenfolge von Verformungszuständen, die ein Körper während der progressiven Deformation durchläuft, definiert den **Verformungspfad** (*strain path*). Verformungspfade beschreiben aufeinanderfolgende Zwischenstadien während der Deformation und können nur relativ zu einem externen Koordinatensystem ausgedrückt werden. Jeder Schritt, der erkannt werden kann, d.h. jede winzige Unterteilung vom Verformungspfad ist eine **Schrittweite** *(increment)*. Der Anteil der Verformung, der von einem Zustand zum nächsten stattfindet, wird **inkrementelle Verformung** (*incremental strain*) genannt.

Infinitesimale Verformung

Jede Schrittweite kann in immer kleiner werdende Schrittweiten geteilt werden. Wenn die Zeit zwischen zwei Zuständen gegen null geht, wird die infinitesimal kleine Menge an Verformung **infinitesimale** Verformung *(infinitesimal strain)* genannt, auch beschrieben als **instantane** *(instantaneous)* Verformung. Wir werden sehen, dass sich die Richtung der momentanen Hauptverformungsachsen sehr von der Richtung der endlichen Hauptverformungsachsen unterscheiden kann.

Verformungsgeschichte

Der Endzustand der Verformung ist die Summe vieler inkrementeller Verformungen, wovon jede durch infinitesimale (sofortige) Merkmale charakterisiert wird. Es ist unmöglich zu rekonstruieren ob die Verformung perfekt homogen ist. Gesteinsmassen sind heterogen, sodass verschiedene Teile verschiedene Teile der Verformungsgeschichte registrieren. Die Herausforderung ist, diese Teile zu kombinieren, um die Entwicklung der gesamten Verformung zu verstehen.

Finite Verformung

Die Summe der inkrementellen Verformungen, d.h. die Gesamtverformung, ist die **finite Verformung** *(finite strain)*. Obwohl alle Verformungszustände das Resultat einer progressiven Deformation sind, liefert der **Endzustand der Verformung** *(finite strain)* keinerlei Information über einen bestimmten Verformungspfad, den der Körper durchlaufen hat. Eine Vielzahl von Verformungspfaden kann zur selben finiten Verformung führen.

Verformungsmessung

Wenn ein Objekt verformt wird, hängt das Ausmass der Verformung von der Grösse des Objekts sowie der Grössenordnung der angewandten Spannung ab. Um diese Massstabsabhängigkeit zu vermeiden, wird die Verformung als normalisierte Verschiebungen gemessen und mit massstabsunabhängigen, dimensionslosen Werten ausgedrückt. Als Formänderung kann die Verformung mit zwei Grössen gemessen werden:

- durch die Änderung der Länge einer Linie: dies ist die lineare Verformung oder **Extension** ε.
- Durch die Änderung eines Winkels zwischen zwei Linien: dies ist die Winkelverformung oder **Scherverformung** (*shear strain*) γ

Jede Verformungsgeometrie kann als Kombination dieser beiden Änderungen gemessen werden.
Die entsprechenden Begriffe sind wie folgt definiert:

Längenänderung

Zwei Parameter beschreiben die **longitudinale Verformung** *(longitudinal strain):* **Elongation** *(extension)* und **Dehnung** *(stretch).*

Elongation

Der Elongationsbetrag ergibt sich aus:

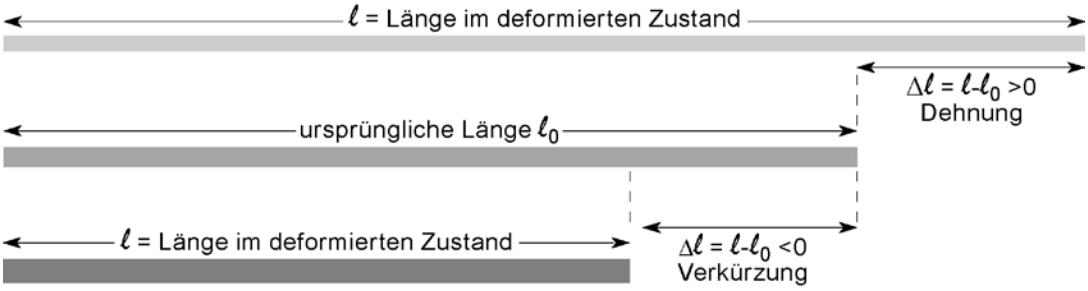
$$\varepsilon = \left(\ell - \ell_0\right)/\ell_0 \tag{1}$$

wobei ℓ_0 die ursprüngliche Länge und ℓ die neue Länge einer Referenzlinie in einem Gestein ist.

Wenn $\ell > \ell_0$ → $\varepsilon > 0$ Ein positiver Wert bedeutet **Verlängerung** (*elongation*).

Wenn $\ell < \ell_0$ → $\varepsilon < 0$ Ein negativer Wert bedeutet **Verkürzung** (*shortening*).

In beiden Fällen ist die Längenänderung dimensionslos.



Definition der Elongation durch die Längenänderung einer Linie: $\varepsilon = \Delta\ell/\ell_0$

Für eine infinitesimale Verformung betrachtet man die eindimensionale Deformation einer ausdehnbaren Achse Ox. P ist ein Punkt mit der Entfernung xP vom Ursprung O. Wenn die Achse gestreckt wird, kommt P zu P'. Wenn Δx eine lineare Funktion von x ist, und wenn die Streckung homogen ist gilt, $OP' = xP + \Delta x$. Wird P sehr nahe zu O gebracht, wird die Gleichung (1):

$$\varepsilon = \left[\left(x + \Delta x\right) - x\right] / x = \Delta x / x$$

Die infinitesimale Verformung an P ist per Definition:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)$$

was allgemein geschrieben wird:

$$\varepsilon = d\ell / \ell \qquad (2)$$

Dehnung

Für Deformationen im grossen Massstab ist die Änderung der Länge einer Linie durch die **Dehnung** S (*stretch*) gegeben, die das Verhältnis der deformierten Länge zur Ursprungslänge ist:

$$S = \ell / \ell_0 = 1 + \varepsilon \qquad (3)$$

Unter einigen Umständen wird die Dehnung auch verwendet, um die logarithmische **natürliche Verformung** *(natural strain)* zu definieren = $\ln(S)$.

Quadratische Elongation

Die **quadratische Elongation** *(quadratic elongation)* λ ist das Standardmass der finiten Längenänderung. Sie wird durch das Quadrat der Dehnung gegeben:

$$\lambda = \left(\ell/\ell_0\right)^2 = \left(1+\varepsilon\right)^2 \qquad (4)$$

Eine Nullverformung wird $\lambda = 1$.
Die quadratische Elongation ist immer positiv.
Hat eine Linie nach der Verformung die gleiche Länge wie vor der Deformation, so nennt man die Linie die **Richtung ohne finite Verlängerung** *(line of no finite longitudinal strain,* $\varepsilon = 0$) .
Manchmal wird die **reziproke** *(reciprocal)* quadratische Elongation $\lambda' = 1/\lambda$ wird manchmal verwendet.

Winkeländerung

Scherwinkel

Der **Scherwinkel** (*angular shear*) ψ wird durch die Änderung eines ursprünglich rechten Winkels definiert (d.h. der Betrag, um den eine vertikale Linie in Bezug auf eine horizontale Linie gedreht wurde):

$$\psi = 90° - (\alpha) \qquad (5)$$

Abhängig von der Richtung der Winkeländerung ist der Schersinn im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn. α ist der Winkel zwischen zwei ursprünglich zueinander senkrechten Referenzlinien. Der Winkel ist in der trigonometrischen (gegenuhrzeigersinnigen) Richtung positiv. Deswegen $-90° \leq \psi \leq +90°$

Achtung:

Gegen oder im Uhrzeigersinn heisst sinistral oder dextral, und bezieht sich nur und nur auf Scherung bei der Blattverschiebung. Andernfalls hängt die Richtung von der Richtung der Beobachtung ab. Es ist dann sicherer zu sagen, Oberseite-zu— *(top to..)*.

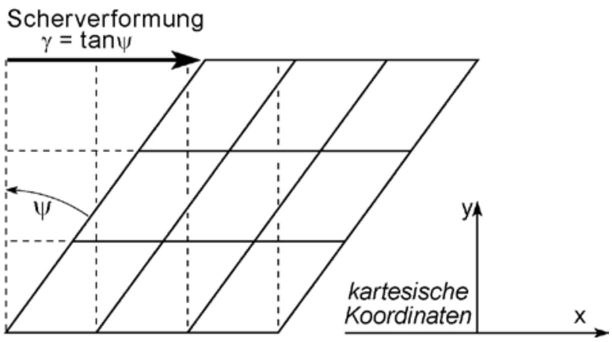
Die Schwierigkeit im Gestein liegt darin zwei Linien zu bestimmen, von denen man weiss, dass sie ursprünglich orthogonal waren.

Scherverformung

Der Wert der **Scherverformung** *(shear strain)* γ ist der Tangens zum Scherwinkel ψ:

$$\gamma = \tan\psi \tag{6}$$

Der Tangens eines sehr kleinen Winkels ist gleich dem Winkel in Radiant. Damit ist die infinitesimale Verformung $\psi = \gamma$.



In kartesischen Koordinaten $\gamma = \Delta x / y$. Diese Gleichung zeigt, dass die Scherverformung eine Interaktion zwischen den Koordinatenachsen beinhaltet.

Volumenänderung

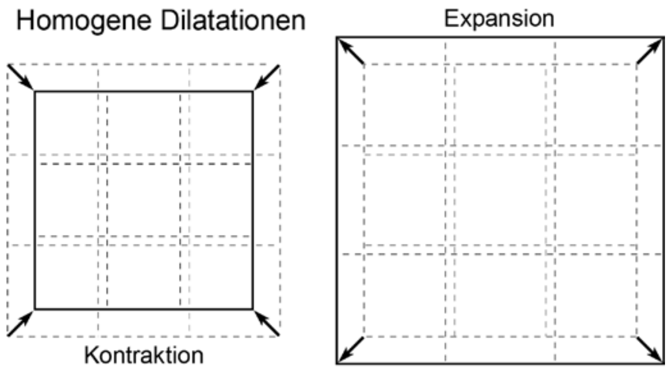
Die Volumenänderung (Dilatation, *dilatation*) ist gegeben mit:

$$D = (V - V_0)/V_0 \tag{7}$$

wobei V und V_0 die Volumen des deformierten und nicht deformierten Zustandes sind. In zwei Dimensionen wird das Volumen V zur Fläche A reduziert.

Es gibt **Expansion** wenn $V > V_0$.

Es gibt **Kontraktion** wenn $V < V_0$.



Für infinitesimale Verformung gilt: $\Delta_A = dA/A$ in zwei und $\Delta_V = dV/V$ in drei Dimensionen.

Verformungsanalyse

Die Verformungsanalyse besteht entweder aus der Ermittlung der Längs- und Scherverformungen, bei denen die Hauptverformungsachsen bekannt sind, oder umgekehrt aus der Ermittlung der Hauptverformungsachsen, bei denen die Längs- und Scherverformungen für verschiedene Richtungen gemessen werden können. Die letztgenannte Option wird bei deformierten Objekten angewandt und ist in der Geologie am häufigsten anzutreffen.

Graphische Darstellung

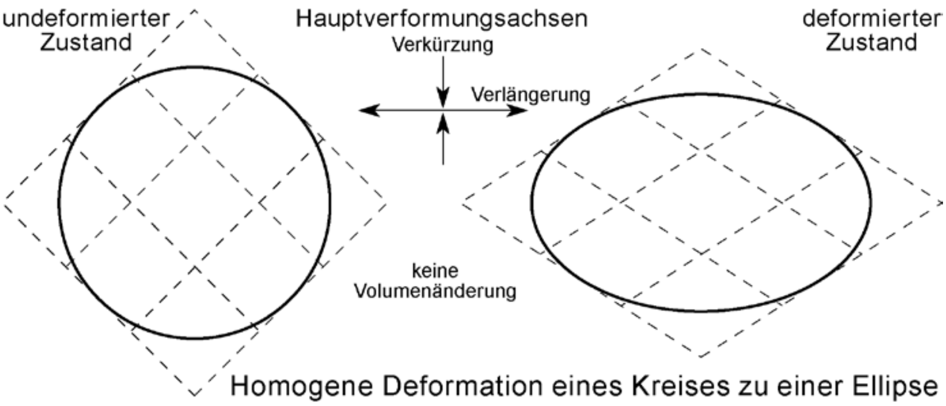
Eine Vielfalt von Methoden ist entworfen worden, um finite Verformung in **Tektoniten** (Gesteine, deren Gefüge die Verformungsgeschichte reflektieren) zu schätzen. Alle Methoden versuchen, die Form und Orientierung der Verformungs-Ellipse (Ellipsoids) zu schätzen, meistens anhand der Verzerrung von Objekten (z.B. Ooiden und Fossilien) oder Punktverteilungen (z.B. Quarzkornzenter in Quarziten).

Verformungsellipse

Der Einfachheit halber denken wir zuerst in zwei Dimensionen.

Definition

Ein Materialkreis mit Einheitsradius (der jegliche Grösse haben kann), vertikal, parallel zur Koordinatensystemsachse geplättet, wird homogen in eine Ellipse mit zwei Hauptachsen deformiert, die vorher die Durchmesser des Kreises waren. Diese **Verformungsellipse** (*strain ellipse*) ist ein zweidimensionales, graphisches Konzept, um die Menge der linearen und angularen Verformung bei der Gesteinsdeformation zu visualisieren. Der Radius dieser Ellipse ist proportional zur Streckung in irgendeine beliebige Richtung. Die längsten und kürzesten Radien, bekannt als die **Hauptverformungsachsen** (*principal strain axes*), definieren die Verformungsellipse. In der betrachteten koordinatenparallelen Plättung sind diese Achsen vertikal (kurz) und horizontal (lang).
Die zweidimensionale Verformung der Fläche, in der die Ellipse liegt, wird durch nur drei Zahlen definiert:
- die Grösse der Verformungsellipse.
- die Orientierung der Hauptverformungsachsen und



Reserviert man den Index 2 für die intermediäre Achse des dreidimensionalen Falls, geht aus den Gleichungen (3) und (4) hervor:

$1+\varepsilon_1=\sqrt{\lambda_1}$ ist die Länge der langen Hauptverformungsachse, die **Hauptdehnungsachse** *(stretch axis)*, und

$1+\varepsilon_3=\sqrt{\lambda_3}$ ist die Länge der kurzen Hauptverformungsachse, die **Hauptverkürzungsachse** *(shortening axis)*.

Die Orientierung ist in der Regel gegen den uhrzeigersinnigen Winkel zwischen der Abszisse und der längsten Hauptverformungsachse.

Zu jedem Zeitpunkt der Deformation, gibt es zwei Verformungsellipsen, die die Gesteinsverformung darstellen: die **finite Verformungsellipse** *(finite strain ellipse)* stellt die Gesamtverformung dar und die **infinitesimale Ellipse** *(infinitesimal ellipse)* die blitzschnelle Verformung, die den Partikel belastet. In zwei Dimensionen sind die infinitesimalen Streckungsachsen die augenblickliche Richtung der maximalen Dehnung und die augenblickliche Richtung der maximalen Verkürzung. Sie sind daher Linien, die die schnellsten und langsamsten Dehnungsraten von allen möglichen Linienorientierungen am jeweils betrachteten Inkrement erleben.

In allen Fällen sind die Hauptverformungsachsen senkrecht zueinander. Darüber hinaus sind sie Linien mit null-Scherverformung.

Form

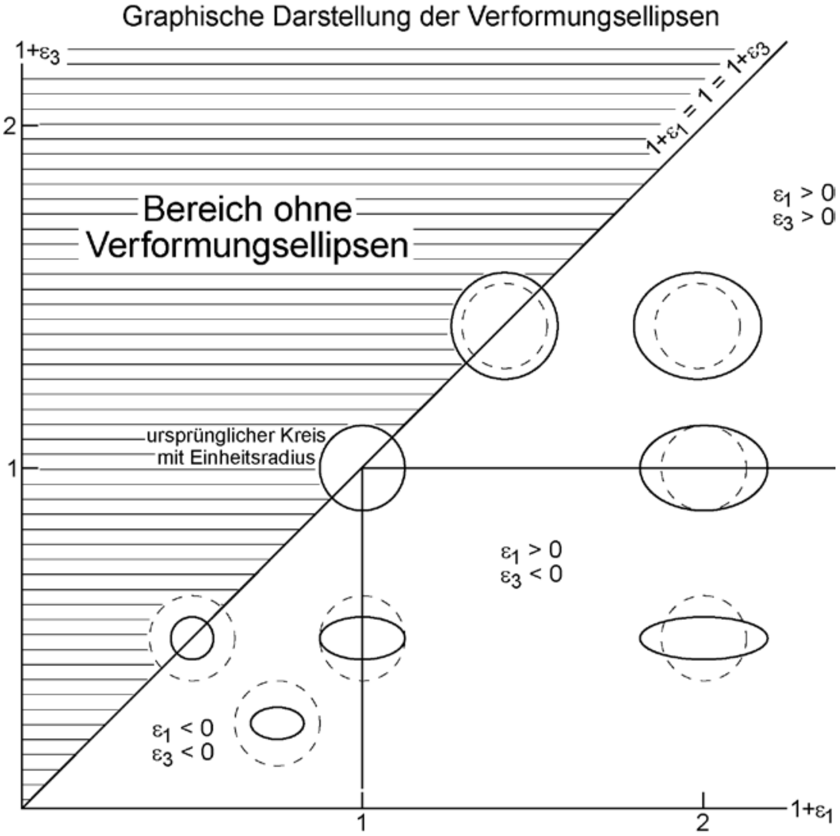
Die Form der Ellipse ist der **Verformungsgrad** *(strain intensity)*. Sie ist einfach das Verhältnis der Hauptachsen (d.h. die Elliptizität):

$$R=(1+\varepsilon_1)/(1+\varepsilon_2) \qquad (8)$$

Diese Gleichung verkörpert die gesamte Intensität der Verzerrung. Eine grafische Darstellung besteht im Plot aus der Hauptdehnungsachse $1+\varepsilon_1$ entlang der horizontalen Achse und der Hauptverkürzungsachse $1+\varepsilon_3$ entlang der vertikalen Achse. Die diagonale Linie ist der Ort von Ellipsen, die Kreise geblieben sind, weil sie gleiche Verlängerung oder gleiche Verkürzung in allen Richtungen, d.h. $1+\varepsilon_1=1=\varepsilon_3$, durchgemacht haben. Keine Ellipse wird über dieser Linie eingetragen, weil $1+\varepsilon_1$ immer grösser oder gleich $1=\varepsilon_3$ ist. Zwei andere, bestimmte Linien können gezeichnet werden: eine für $\varepsilon_1=0$ ist vertikal, die andere, für welche $\varepsilon_3=0$, ist horizontal. Diese zwei Linien begrenzen drei Felder unterhalb der Diagonale, wo alle mögliche Verformungsellipsen dargestellt werden.

- das oberste Feld (unter der Diagonalen und über der horizontalen Linie $1+\varepsilon_3=1$) schliesst alle Ellipsen ein, in denen beide Hauptverformungsachsen positive Verlängerungen sind.
- das rechteckige Feld unterhalb der horizontalen Linie und auf der rechten Seite der vertikalen Linie schliesst die Ellipse ein, in denen $\varepsilon_1>0$ und $\varepsilon_3<0$.

- das Dreieck unter der Diagonalen und auf der linken Seite der vertikalen Linie schliesst jene Ellipsen ein, in denen ε_1 und ε_3 negative Verkürzungen sind.



Dilatation

Die Fläche der Verformungsellipse ist das Produkt der Hauptachsen.

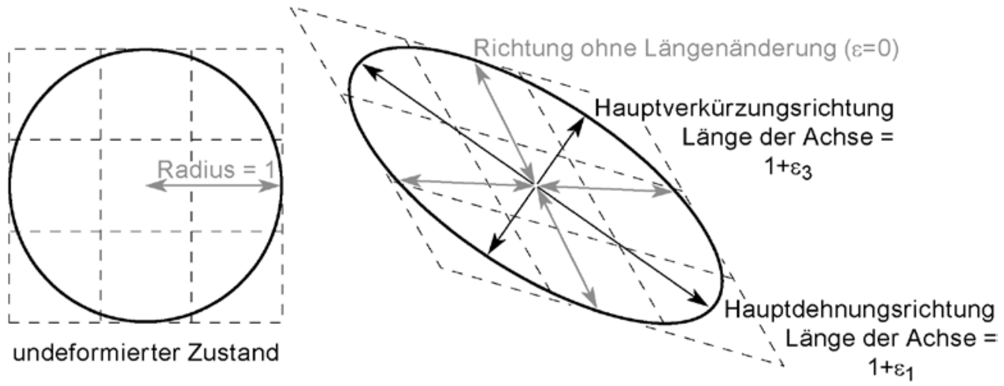
$$1+\Delta=(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)$$

Die Dilatation Δ ist positiv, wenn die Fläche zunimmt, negativ wenn sie sich verringert

Längenänderung in Bezug auf die Orientierung einer Linie

Der unverformte Kreis, der konzentrisch auf die finite Verformungsellipse gelegt wird, erbringt vier Durchschnittspunkte. Die zwei Linien, welche die zwei durch das Zentrum gegenüberliegenden Punkte verbinden, haben keine Nettoänderung in der Länge erlitten: d.h. es sind Linien ohne **Gesamtverlängerung**. Gegeben durch die Symmetrie halbieren die Verformungsachsen diese Linien. Alle Linien in den zwei Sektoren, die die längste Verformungsachse enthalten, werden verlängert, alle Linien in den Sektoren, welche die kürzeste Verformungsachse enthalten, werden verkürzt.

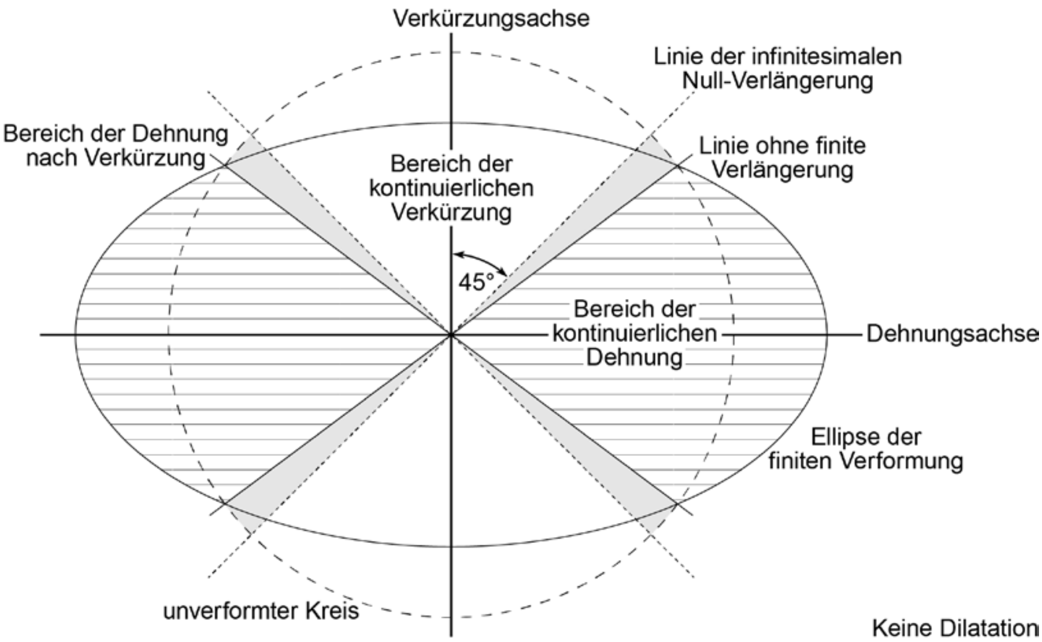
Für die erste infinitesimal kleine Schrittweite der betrachteten vertikalen Plättung sind natürlich die beiden Linien ohne inkrementelle Verlängerung 45° zu den Hauptverformungsachsen geneigt. Mit weiterer Plättung, rotieren die zwei Materiallinien mit ursprünglicher null-Verlängerung in Richtung der horizontalen Achse während die Verformungsellipse entlang dieser Achse verlängert und entlang der vertikalen Achse verkürzt wird. Doch zu jedem Zeitpunkt während der Verformung werden sich Linien innerhalb der 45° von der horizontalen Achse sich verlängern; und Linien innerhalb der 45 ° von der vertikalen Achse gleichzeitig verkürzen. Deshalb gibt es Material in der Verformungsellipse, das durch Linien migriert, die die Verkürzungs- und Verlängerungsbereiche begrenzen.



Homogene Deformation eines Kreises mit Einheitsradius zu einer Verformungsellipse

Die Verformungsellipse wird folglich in Bereiche geteilt, in denen Materiallinien eine unterschiedliche Geschichte erlebt haben:
- Innerhalb von 45° zur vertikalen Achse haben sich die Linien im Laufe ihrer Verformungsgeschichte verkürzt.
- Zwischen der 45° Linie und der rotierten ersten Linien ohne Längenänderung, haben sich die Materiallinien zuerst verkürzt, dann verlängert.
- Zwischen den Linien ohne Längenänderung, die symmetrisch bezüglich der horizontalen Streckung sind, wurden die Materiallinien dauerhaft verlängert.

Beachten Sie, dass für eine sehr grosse Verformung alle Linien zu einer Vereinigung mit der Verlängerungsachse tendieren werden. Darüber hinaus existieren die Linien ohne endliche Verlängerung nicht wenn die Verformung negative oder positive Dilatation beinhaltet, da dann alle Linien eine negative bzw. positive Streckung haben.
- Zwischen den Linien ohne Längenänderung, die symmetrisch bezüglich der horizontalen Streckung sind, wurden die Materiallinien dauerhaft verlängert.



Änderndene Bereiche der Verkürzungs- / Verlängerungslinien von infinitesimaler auf finite Verformung in zwei Dimensionen

Beachten Sie, dass für eine sehr grosse Verformung alle Linien zu einer Vereinigung mit der Verlängerungsachse tendieren werden. Darüber hinaus existieren die Linien ohne endliche

Verlängerung nicht wenn die Verformung negative oder positive Dilatation beinhaltet, da dann alle Linien eine negative bzw. positive Streckung haben.

Anwendung

Wenn eine ursprünglich kreisförmige Struktur nach der Deformation elliptisch wird, können die zwei Hauptachsen $k(1+\varepsilon_1)$ und $k(1+\varepsilon_2)$ direkt gemessen werden. k ist eine Konstante, da die Originalgrösse des Kreises unbekannt ist. Die Steigung der Regressionslinie durch viele Messungen von langen und kurzen Achsen ergibt die Elliptizität R der finiten Verformungsellipse.

Rotationale Komponente der Verformung

Die einzige Rotation, die in zwei Dimensionen betrachtet wird, ist um eine Achse senkrecht zur Beobachtungsebene, d.h. senkrecht zu den beiden Hauptverformungsachsen. Der rotationale Teil der Verformung ω ist der Winkelunterschied der Orientierung der Hauptverformungsachsen hinsichtlich einer Bezugslinie. Man verwendet häufig Symbole wie θ und θ' für die Winkelorientierungen vor bzw. nach der Verformung.

$$\omega = \theta' - \theta$$

Verformung in drei Dimensionen: Verformungsellipsoid

Wir verwenden und leiten in drei Dimensionen Verformungsmassen ab, die analog zu denen in zwei Dimensionen sind.

Definition

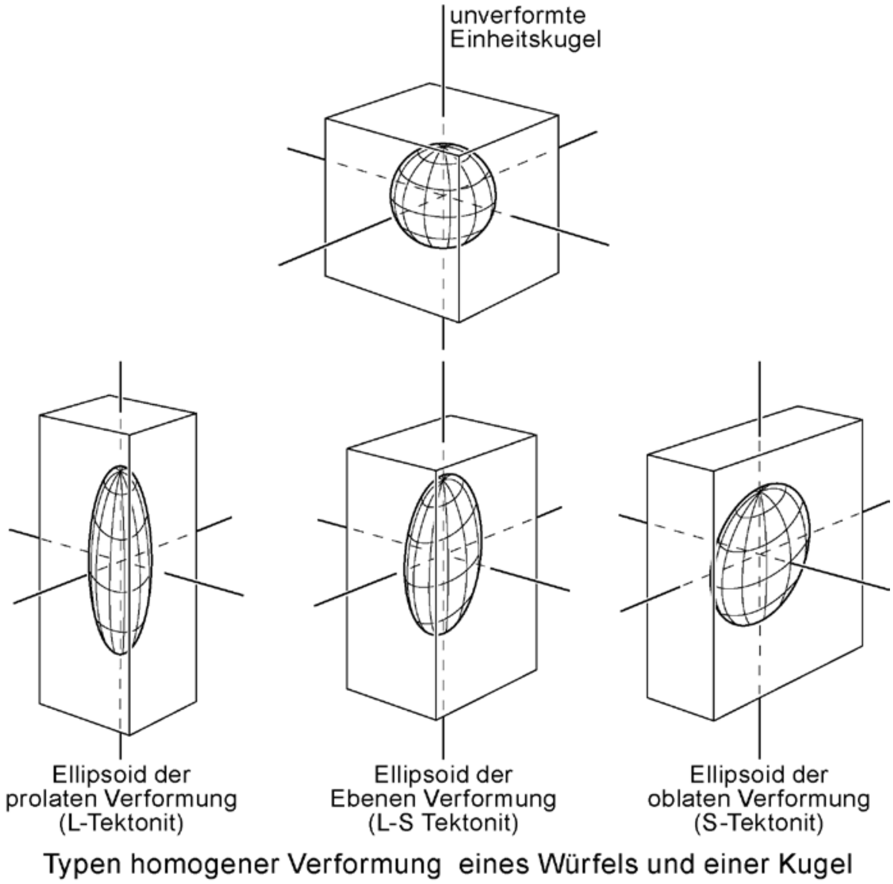
Ein sich deformierendes duktiles Material fliesst von Gebieten mit hohen Spannungen zu Gebieten mit niedrigen Spannungen. In einer Grössenordnung, in der die Deformation als kontinuierlich und homogen betrachtet werden kann, wird die natürliche Deformation in drei Dimensionen als die Formänderung einer imaginären oder Materialkugel mit Einheitsradius $r = 1$ beschrieben. Diese Einheitskugel ist das **Verformungsellipsoid** (*strain ellipsoid*), dessen Form und Orientierung die Gesamtverformung beschreiben. Die Gleichung, die dieses Ellipsoid beschreibt, ist:

$$\frac{x^2}{(1+\varepsilon_1)^2} + \frac{y^2}{(1+\varepsilon_2)^2} + \frac{z^2}{(1+\varepsilon_3)^2} = 1$$

Das Verformungsellipsoid wird ebenfalls durch seine drei Hauptachsen definiert, die als die **Hauptverformungsachsen** (*principal strain axes*) bekannt sind. Die maximale, mittlere und minimale Achse werden X, Y und Z bezeichnet, wenn ihre Längen gemessen werden können, um die Grösse der Verformung zu definieren. Aus den Gleichungen (3) und (4) sind diese Längen:

$$X = 1+\varepsilon_1 = \sqrt{\lambda_1} \qquad \geq \qquad Y = 1+\varepsilon_2 = \sqrt{\lambda_2} \qquad \geq \qquad Z = 1+\varepsilon_3 = \sqrt{\lambda_3}$$

da die ursprüngliche Kugel einen Radius von 1 hat. Die längste Achse ist die X-Achse, sie stellt die **Hauptdehnungsrichtung** dar. Die kürzeste Achse ist die Z-Achse, sie stellt die **Hauptverkürzungsrichtung** dar. Y ist die mittlere Achse. Die Scherverformung ist in Richtung dieser drei Achsen gleich Null. Die Deformation, bei der die lineare Dehnung der drei Hauptverformungsachsen ungleich null ist (X>Y>Z), nennt man **dreiachsig** *(triaxial)*. Ebenen, die zwei dieser Achsen enthalten, sind **Hauptverformungsebenen** *(principal strain planes)*.
Das Verformungsellipsoid ist die Veranschaulichung des Verformungstensors zweiter Ordnung.



Die Linien ohne Gesamtverlängerung in der Verformungsellipse entsprechen zwei Flächen ohne Längenänderung (keine Dehnung, keine Rotation) im Verformungsellipsoid.
Querschnitte des Verformungsellipsoids sind Ellipsen (aber sie können kreisförmige Schnitte sein). Im Allgemeinen wird das 3D Verformungsellipsoid bestimmt, indem man in Gesteinen Flächen durchsägt, auf denen die 2D Verformungsellipsen gemessen werden. Dann werden die Ellipsen in ein Ellipsoid zusammengefügt.

Form

Eine einzelne Zahl, das Verformungsverhältnis, spezifiziert die Form (die Verzerrungskomponente) der Verformungsellipse in zwei Dimensionen. In drei Dimensionen, wird die Form jedes möglichen Ellipsoids komplett durch zwei Verhältnisse der Hauptverformungsachsen gekennzeichnet: Das Verhältnis $R_{1,2}$ der längsten und intermediären Achse und das Verhältnis $R_{2,3}$ zwischen der intermediären und kürzesten Achse:

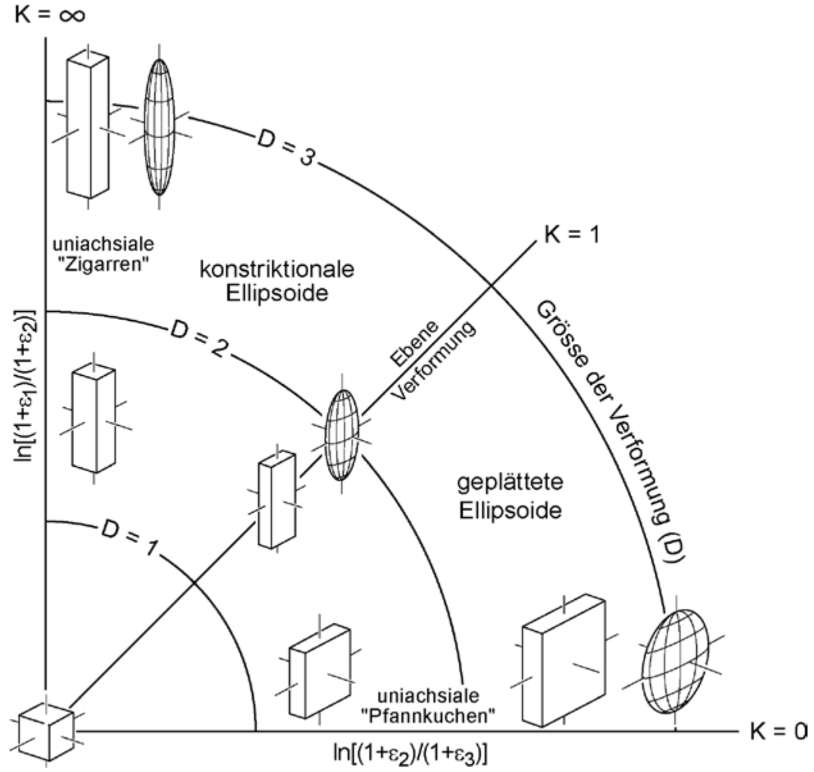
$$R_{1,2} = X/Y \qquad \text{und} \qquad R_{2,3} = Y/Z\,.$$

Die verschiedenen Formen des Verformungsellipsoids werden mit Hilfe des Parameters K unterschieden:

$$K = \left(R_{1,2} - 1\right) / \left(R_{2,3} - 1\right)$$

Beachten Sie, dass 1.0 der minimale Wert von $R_{1,2}$ und $R_{2,3}$ ist.
Jedes Ellipsoid kann als Punkt im sogenannten Flinn-Diagramm geplottet werden, in welchem $R_{1,2}$ vertikal gegen $R_{2,3}$ aufgetragen wird. K-Werte beschreiben die Steigung von Geraden durch den Ursprung.
Die Diagonale ($R_{1,2} = R_{2,3}$) definiert die **ebene Verformung** *(plane strain deformation),* in der die Y- Achse des finiten Verformungsellipsoids während der Deformation konstant bleibt (d.h., es gibt

weder Verlängerung noch Verkürzung entlang der Y-Hauptverformungsachse und alle Versatze aufgrund der Deformation treten in der XZ-Ebene auf).



Form des Verformungsellipsoides (K) im Flinn Plot

Die diagonale Linie der ebenen Verformung teilt das Diagramm in zwei Bereiche auf. Ohne Volumenänderung werden die verschiedenen Verformungszustände wie folgt beschrieben:

$K = \infty$: **Axial symmetrische Streckung** *(axially symmetric extension):* $X >>>> Y \geq Z$; Die Ellipsoide haben eine lange zigarrenähnliche Form und plotten nahe der vertikalen Diagrammachse.

$\infty > K > 1$: **konstriktionale Verformung** *(Constrictional strain)*. In diesem Fall $X > Y = Z$ und die Ellipsoide haben eine längliche Form, die wie eine Zigarre aussieht (**prolates Ellipsoid,** *prolate ellipsoid).* Diese zigarrenförmigen Ellipsoide plotten nahe der vertikalen Diagrammachse, über der Diagonallinie der ebenen Verformung.

$K = 1$: Ebene Verformung bei konstantem Volumen. Der gesamte Versatz tritt in einer einzelnen Ebene auf, die zu der Y-Hauptverformungsachse senkrecht ist. Es gibt weder Verlängerung noch Verkürzung entlang dieser der Hauptverformungsachse.

$1 > K > 0$: **Plättungsverformung** *(Flattening strain)*. In diesem Fall $X = Y > Z$. Die Ellipsoide haben die Form eines Pfannkuchens (**oblates Verformungsellipsoid**, *oblate ellipsoid)* und plotten nahe der horizontalen Diagrammachse, unterhalb der Linie der ebenen Verformung.

$K = 0$: **Axiale symmetrische Plättung** *(axially symmetric flattening)*. Die Ellipsoide werden flachgedrückt und plotten entlang der horizontalen Diagrammachse.

Volumenänderungen

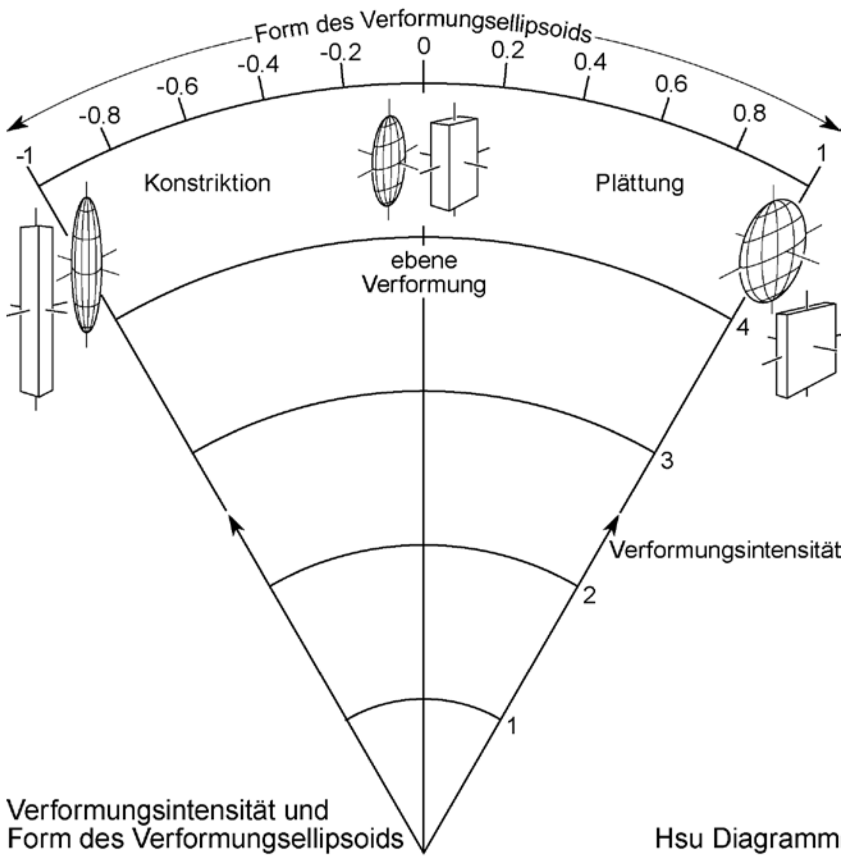
Unter $V = X.Y.Z$ und $V_0 = 1$, wird die Dilatation (Gleichung 7) ausgedrückt durch:

$$\Delta + 1 = X.Y.Z = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$

Die Bedingungen der ebenen Verformung, die die Felder der konstriktionalen und Plättungsverformung im logarithmischen Flinn Diagramm trennen, sind definiert als $\varepsilon_2 = 0$. Neuanordnung in logarithmischen Ausdrücken ergibt die Gleichung einer Geraden mit Einheitssteigung. Volumenänderungen produzieren eine parallele Verschiebung der Diagonallinie der ebenen Verformung. Wenn $\Delta > 0$, schneidet die Linie die vertikale Achse; wenn $\Delta < 0$, schneidet die Linie die horizontale Achse.

Verformungsintensität

Verschiedene Techniken bieten eine dimensionslose Messung der Verformung in Bezug auf die Form des Verformungsellipsoids unabhängig von der Orientierung.



Der Grad der Verformung nimmt visuell vom Ursprung entfernt zu. Er wird in einem logarithmischen Flinn Diagramm definiert:

$$D = \sqrt{\log^2\left(R_{1,2}\right) + \log^2\left(R_{2,3}\right)}$$

wobei $\log\left(R_{1,2}\right)$ und $\log\left(R_{2,3}\right)$ die gleichen Verhältnisse wie beim Flinn Diagramm sind.

Das sogenannte Hsu Diagramm nutzt die natürliche Verformung. Alle Verformungszustände werden auf einem 60 °-Sektor eines Kreises dargestellt. Das Lode-Verhältnis $-1 < \nu < +1$ definiert die Form der erhaltenen Ellipsoide:

$$\nu = \left(\log R_{2,3} - \log R_{1,2}\right) / \left(\log R_{2,3} + \log R_{1,2}\right)$$

ν wird entlang des Kreisbogens gemessen. Alle Ellipsoide der ebenen Verformung (K-Linie des Flinn Diagramms) plotten entlang des halbierenden Bogens $\nu = 0$, einachsige Konstriktion entlang des Radius $\nu = -1$ und alle einachsigen Plättungen entlang des Radius $\nu = -1$. Die Grösse der Verformung ist der Abstand vom Kreismittelpunkt, ausgedrückt durch:

$$\bar{\varepsilon} = \left(1/\sqrt{3}\right)\left[\left(\log R_{1,2}\right)^2 + \left(\log R_{2,3}\right)^2 + \left(\log R_{1,3}\right)^2\right]^{1/2}$$

wobei $R_{1,3}$ gleich Z/X ist.

Eine weitere Messung der Verformungsintensität verwendet das Verhältnis der Hauptverformungsachsen:

$$r = \left(X/Y\right) + \left(Y/Z\right) - 1.$$

> Bemerkung: die Verformungsellipsen und -ellipsoide sind Formen, die keine Information zur Deformationsgeschichte liefern; beispielsweise kann eine identische Form durch einfache oder reine Scherung entstehen und die Summe der beiden Ellipsen ist auch eine Ellipse (Ellipsoid in 3D). Umgekehrt können überlagernde Strukturen in anisotropen (geschichteten oder geschieferten) Gesteinen, die heterogen verformt sind, eine gewisse relative Chronologie zwischen Deformationsstrukturen ergeben.

Verformungszustand

Der **Verformungszustand** *(state of strain)* wird durch die Orientierung und Grösse der drei Hauptverformungsachsen definiert.

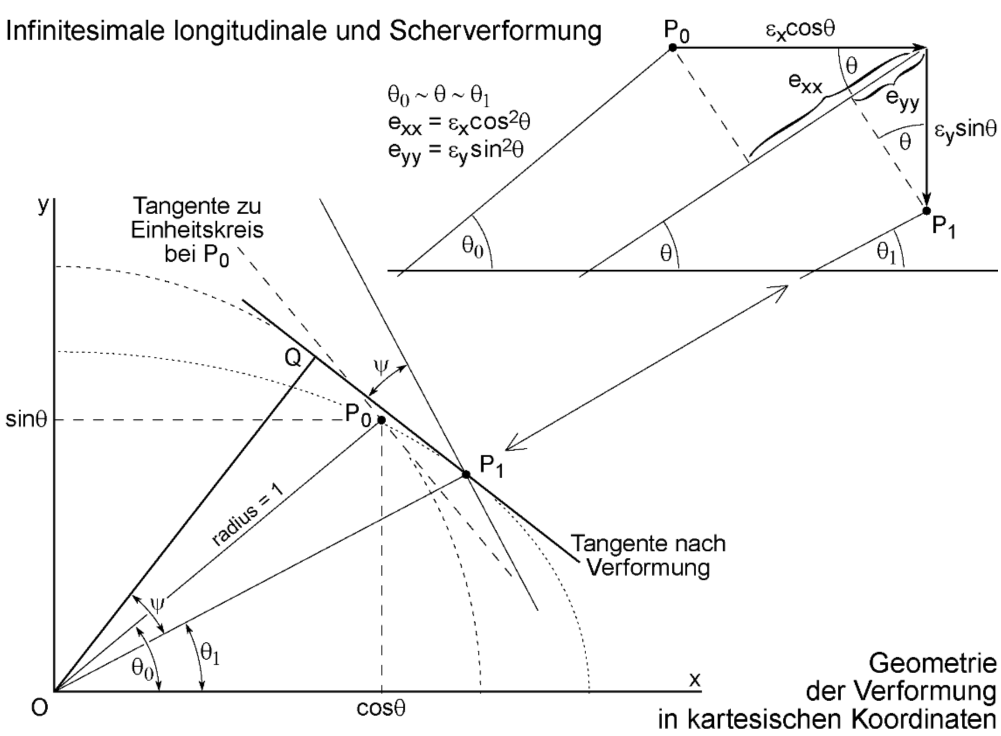
Reziprokes Verformungsellipsoid

Das reziproke Verformungsellipsoid ist das Ellipsoid mit bestimmter Form und Orientierung, das in einem unverformten Körper enthalten ist, und das durch homogene Verformung in eine Kugel umgewandelt wird; d.h. die drei Hauptachsen werden in drei orthogonale Durchmesser der Kugel umgewandelt. Die Richtungen der Achsen des reziproken Verformungsellipsoids sind die ursprünglichen Richtungen der Hauptverformungsachsen des unbelasteten Zustandes.

Mohr Diagramm für Verformung

Wie vorhin nehmen wir zweidimensionale reine Scherung an, parallel zur horizontalen x- (Dehnung) und vertikalen y-Koordinatenachse (Verkürzung), die einander im festen Ursprung O schneiden. Ausserdem gilt homogene und infinitesimal kleine Verformung, so dass die lineare und die Scherverformung so klein sind, dass ihre Produkte vernachlässigbar und damit alle Verschiebungen linear sind.

Ein Punkt P_0 hat die Koordinaten $\left(x_0, y_0\right)$. Der Einfachheit halber nimmt man eine Linie OP_0 mit Einheitslänge an, die mit einem Winkel θ zur horizontalen x-Achse geneigt ist. Dann ist $x_0 = \cos\theta$ und $y_0 = \sin\theta$.



Infinitesimale longitudinale Verformung

Nach der Verformung hat sich P_0 auf P_1 mit den Koordinaten (x_1, y_1) verschoben. Die Verschiebung von P_0 nach P_1 hat zwei Komponenten, die jeweils parallel zu den Koordinatenachsen sind. Sie entsprechen der linearen Verlängerung (Gleichung 1) der horizontalen und vertikalen Linien, die x_0 bzw. y_0 definieren. Diese zwei Komponenten sind:

Horizontale Verlängerung: $\varepsilon_x \cos\theta$

Vertikale Verlängerung: $\varepsilon_y \sin\theta$

Die Linien OP_0 und OP_1 liegen fast übereinander und sind parallel, wenn die Verschiebungskomponenten infinitesimal klein sind. Eine einfache geometrische Konstruktion und Anwendung des Satz des Pythagoras zeigt dann, dass die Verlängerungskomponenten der Linie $OP_0 = OP_1$ jeweils $e_{xx} = \varepsilon_x \cos^2\theta$ und $e_{yy} = \varepsilon_y \sin^2\theta$ (negativ im skizzierten Fall) sind.

Dann ist die lineare Verlängerung der Längeneinheit:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta$$

Für infinitesimale Verformung kann dies im Hinblick auf die quadratische Elongation umgewandelt werden (Gleichung 4):

$$\lambda = \lambda_x \cos^2\theta + \lambda_y \sin^2\theta \qquad (9)$$

Umschreiben mit der trigonometrischen Substitution zu verdoppelten Winkeln $\cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$ und $\sin^2\theta = (1-\cos 2\theta)/2$ ergibt die Längenänderung:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta \qquad (10)$$

Infinitesimale Scherverformung

Die geringe Verschiebung von P_0 zu P_1 beinhaltet auch eine Neigungsänderung der Linie von $\tan\theta_0 = y_0/x_0$ zu $\tan\theta_1 = y_1/x_1$. Diese Rotation der Linie bedeutet eine Scherverformung, wie in Gleichung (6).

Die Linie OP_0 ist der Radius des Kreises, der in die durch P_1 verlaufende Verformungsellipse verformt ist. Die Tangente an den Kreis in P_0 (daher anfänglich senkrecht zu OP_0) ist zu OP_1 geneigt. Der Wechsel vom rechten Winkel zum neuen Winkel ist der Scherwinkel ψ. Dies kann als Winkel zwischen der Linie senkrecht zu OP_1 und der geneigten Tangente am Einheitskreis visualisiert werden, was auch dem Winkel zwischen OP_1 und der Senkrechten zu dieser geneigten Tangente entspricht. Nennen wir Q den Schnittpunkt zwischen der Senkrechten vom Ursprung zur verzerrten Tangente und dieser Linie. Dann wird der Scherwinkel gegeben durch:

$$\cos\psi = OQ/OP_1$$

die mit der Sekantenfunktion beschrieben werden kann:

$$\sec\psi = OP_1/OQ$$

Mit der Erinnerung an die trigonometrische Funktion $\tan^2\psi = \sec^2\psi - 1$.

Die Standardgleichung einer Ellipse, deren Haupt- und Nebenachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, ist:

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$$

wobei a und b die Halbachsen sind, in diesem Fall $1+\varepsilon_x = \sqrt{\lambda_x}$ und $1+\varepsilon_y = \sqrt{\lambda_y}$.

In Koordinatengeometrie und unter Annahme, dass für infinitesimale Verformung $x^2 = x_0 x_1$ und $y^2 = y_0 y_1$, wird die Gleichung der Ellipse an (x_1, y_1) zu $\left(xx_1/a^2\right) + \left(yy_1/b^2\right) = 1$.

Da die Verformung sehr klein ist, wird die Gleichung der Ellipse zu derjenigen der Tangente an P_1 vereinfacht. Für P_1 ausgedrückt: $x_1 = \cos\theta(1+\varepsilon_x) = \cos\theta\sqrt{\lambda_x}$ und $y_1 = \sin\theta\left(1+\varepsilon_y\right) = \sin\theta\sqrt{\lambda_y}$.

Die Tangente zur Verformungsellipse an P_1 wird zu:

$$\left(x\cos\theta/\sqrt{\lambda_x}\right) + \left(y\sin\theta/\sqrt{\lambda_y}\right) = 1$$

Für eine unendlich kleine Verformung können die Variablen als Konstanten genommen werden und wir erkennen die Standardgleichung einer Geraden: $mx + ny + r = 0$.

Der senkrechte Abstand einer Linie zum Ursprung ist $d = r/\sqrt{m^2+n^2}$

Wo der Radius r einen absoluten Wert hat.

So können wir schreiben: $$OQ = \sqrt{1/\left[\left(\cos^2\theta/\lambda_x\right) + \left(\sin^2\theta/\lambda_y\right)\right]}$$

Daher $$\sec\psi = \sqrt{\lambda\left[\left(\cos^2\theta/\lambda_x\right) + \left(\sin^2\theta/\lambda_y\right)\right]}$$

Wenn wir 1 substrahieren, erhalten wir die Scherverformung:

$$\tan^2\psi = \lambda\left[\left(\cos^2\theta/\lambda_x\right) + \left(\sin^2\theta/\lambda_y\right)\right] - 1$$

die in Gleichung (9) ergibt:

$$\gamma = \frac{\left(\lambda_x - \lambda_y\right)}{\sqrt{\lambda_x\lambda_y}}\cos\theta\sin\theta$$

wobei $\sqrt{\lambda_x\lambda_y} = \sqrt{(1+\varepsilon_x)^2\left(1+\varepsilon_y\right)^2}$ ausdrückt.

Die infinitesimale Verformung wird so klein, wenn sie quadriert wird, dass sie vernachlässigt werden kann. Dann $\sqrt{\lambda_x\lambda_y} \approx \sqrt{1}$ und:

$$\gamma = (1+\varepsilon_x)^2 \left(1+\varepsilon_y\right)^2 \cos\theta \sin\theta$$

Verwenden der Doppelwinkel für Einzelwinkel und Entwicklung der quadrierten Verformungsausdrücke ergibt:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)}{2} \sin 2\theta \tag{11}$$

Mohr-Kreis der infinitesimalen Verformung

Gleichung (10) und die halbierte Gleichung (11) können quadriert und addiert werden, um zu schreiben:

$$\left[\varepsilon - (1/2)\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right]^2 + \left(\gamma^2/2\right) = \left[(1/2)\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\right]^2 \left(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta\right)$$

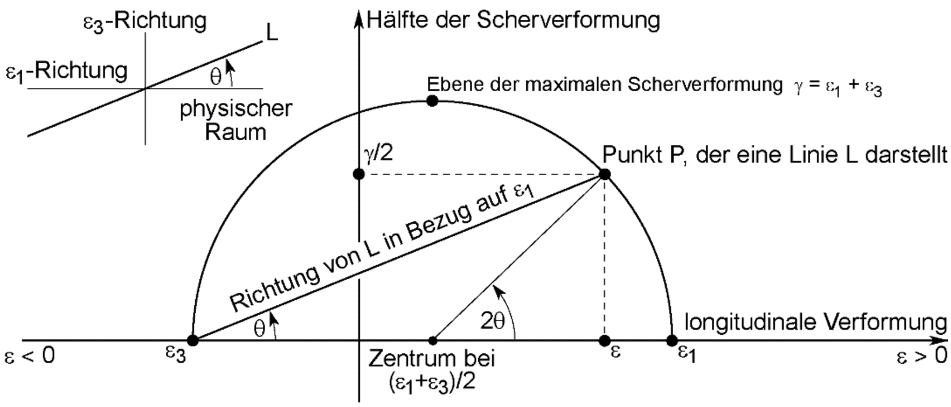
da $\cos^2 + \sin^2 = 1$ gilt für jeden Winkel:

$$\left[\varepsilon - (1/2)\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right]^2 + \left(\gamma^2/2\right) = \left[(1/2)\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\right]^2$$

wo die Form der Standardgleichung eines Kreises in der Koordinatenebene (x, y) mit Zentrum (h, k) und Radius r erkannt werden kann:

$$(x\text{-}h)^2 + (y\text{-}k)^2 = r^2$$

mit $x = \varepsilon$, $y = \gamma/2$ und $k = 0$.



Zweidimensionale Mohr'sche Konstruktion für infinitesimale Verformung

Diese Lösung zeigt, dass eine Mohr'sche Konstruktion für infinitesimale Verformung mit normaler Elongation als Abszisse verwendet werden kann. Die Ordinate stellt aber nur die Hälfte der Scherverformung dar. Wie für Spannungen enspricht ein Winkel, der vom Zentrum des Mohr'schen Verformungskreises einen Bogen zwischen zwei Punkten auf dem Kreis spannt, zweimal dem physikalischen Winkel im Material. Dies zeigt sogleich, dass die maximale Scherverformung auf Ebenen 45 ° zur maximalen Dehnung auftritt.

Mohr-Kreis der finiten Verformung

Näherungen wie $P_0 = P_1$ und $\theta_0 = \theta = \theta_1$, die für infinitesimal kleine Verformung gemacht werden, können für eine grössere, geologische und messbare Verformung nicht akzeptiert werden.

Längenänderungen werden mit der reziproken quadratischen Elongation $\lambda' = 1/\lambda = (1+\varepsilon)^2$ (siehe Gleichung 4) berücksichtigt. Die Herleitung für Längenänderungen ist ähnlich wie für infinitesimale Längenänderung, vergleichbar mit Gleichung (9), die mit λ' und θ' umgeschrieben wird; das entspricht der Orientierung einer Referenzlinie nach der Verformung:

$$\lambda' = \lambda'_x \cos^2\theta' + \lambda'_y \sin^2\theta' \tag{12}$$

Eine Formulierung ähnlich der Gleichung (10) für infinitesimale Längenänderung kann benutzt werden, unter Verwendung der Doppelwinkel-Identitäten $\cos^2\theta' = (1+\cos 2\theta')/2$ und $\sin^2\theta' = (1-\cos 2\theta')/2$:

$$\lambda' = \frac{\lambda'_x + \lambda'_y}{2} + \frac{\lambda'_x - \lambda'_y}{2}\cos 2\theta' \tag{13}$$

Beurteilung der Scherverformung beginnt, wie für infinitesimale Verformung, mit der Gleichung der Ellipse, aber jetzt in Bezug auf die reziproke quadratische Elongation ausgedrückt als:

$$\lambda'_x x'^2 + \lambda'_y y'^2 = 1$$

wobei x' und y' die Koordinaten eines Punkts (d.h. die Richtungen eines Radiusvektors) nach der Verformung sind. An diesem Punkt lässt sich die Gleichung einer Linie tangential zur Ellipse aus der Gleichung der Ellipse herleiten:

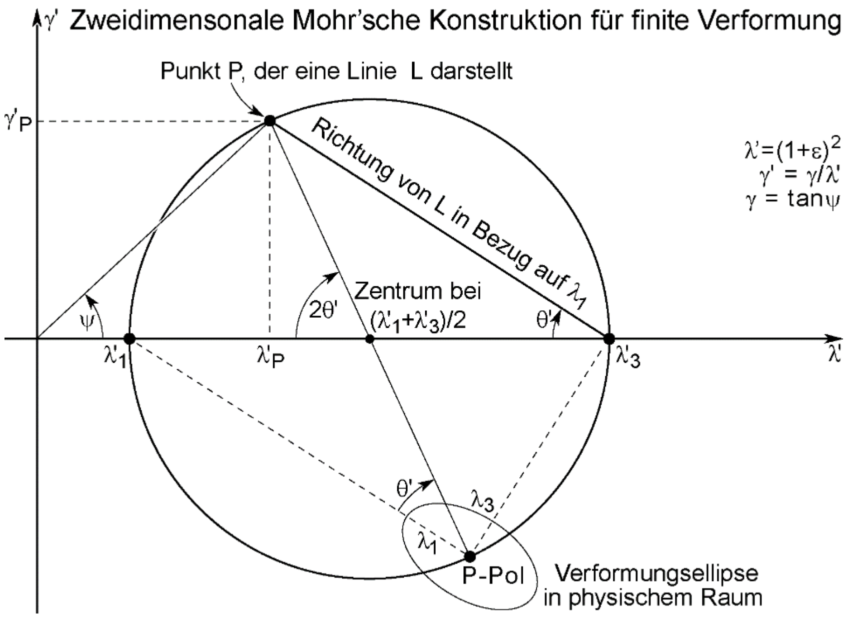
$$\sqrt{\lambda'} = \left(\lambda'_x \cos\theta'\right)x' + \left(\lambda'_y \sin\theta'\right)y'$$

Normalisierung, Expandieren, Quadrieren, Substitution und Entwicklung so ausführlich wie in der Fachliteratur ergibt erwartungsgemäss eine Gleichung ähnlich der Gleichung (11):

$$\gamma' = \frac{\left(\lambda'_x - \lambda'_y\right)}{2}\sin 2\theta' \tag{14}$$

wo $\gamma' = \gamma/\lambda'$.

Beide Einheiten auf der linken Seite der Gleichungen (13) und (14) definieren gegeneinander aufgetragen einen Kreis, den Mohrkreis des Verformungszustands, der auf der Abszisse zwischen λ'_x und λ'_y zentriert ist. Beachten Sie, dass per Definition λ'_x die grössere Hauptdehnung darstellt, aber im Plot einen kleineren Wert als die kleinere Hauptdehnung λ'_y hat. Der Mohr‘sche Verformungskreis ist vollständig auf der rechten Seite des Ursprungs (die λ'-achse ist horizontal), da die reziproke quadratische Elongation $\lambda' = 1/\lambda = (1+\varepsilon)^2$ immer positiv ist. γ' ist ein Mass für γ, der Scherverformung einer Materiallinie bei θ' zur identifizierbaren λ_x-Richtung im verformten Zustand. Die Linien ohne Gesamtverlängerung haben den Wert $\lambda' = 1$. Sie sind Schnittpunkte der vertikalen Linie durch diesen Abszissenpunkt mit dem Kreis.



Es gibt wichtige Unterschiede zum Mohr'schen Spannungskreis.

- Der Verformungskreis stellt einen zweidimensionalen Zustand der homogenen finiten Verformung dar.
- Jeder Punkt auf dem Kreis repräsentiert eine Linie, und keine Ebene wie für den Spannungskreis.
- Mit reziproker Elongation sind die Verformungswinkel θ' positiv im Uhrzeigersinn und werden von der linken Seite des Kreismittelpunktes abgetragen.
- Allerdings bleibt der Scherwinkel ψ zwischen der Abszisse und der Linie zwischen dem Ursprung und jedem Verformungspunkt (da $\gamma' = \gamma/\lambda'$) positiv im Gegenuhrzeigersinn.

Mohr-Kreise der infinitesimalen und der finiten Verformung in drei Dimensionen

Wie für Spannungen, kann die reziproke intermediäre Hauptverformungsachse auf der Abszisse gezeichnet werden. Zwei Kreise innerhalb des definierten zweidimensionalen Kreises vertreten den ganzen dreidimensionalen finiten Verformungszustand.

Verformungsregime

Als erste Näherung wird angenommen, dass die allgemeine Verformung homogen ist und dass sie in zwei Dimensionen (ebene Verformung), in der keine Änderung der Fläche stattgefunden hat, behandelt werden kann. Die Begriffe in zwei Dimensionen (2D) werden dann in die dritte Dimension (3D) erweitert. Die allgemeine Deformation hat zwei Endglieder:

- die reine Scherung.
- die einfache Scherung;

Sie beziehen sich auf zwei Arten von Verformungspfaden:

- Reine Scherung folgt einem koaxialen Verformungspfad.
- Einfache Scherung folgt einem nicht-koaxialen Verformungspfad;

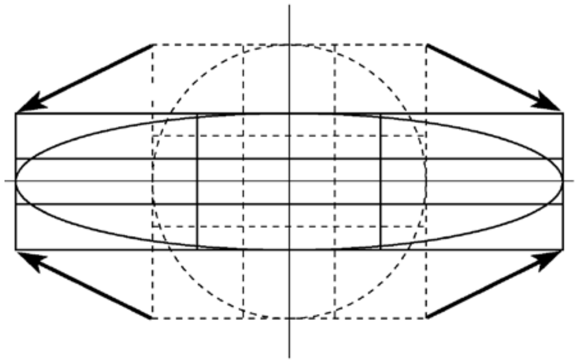
Damit beziehen sich diese zwei Begriffe auf die charakteristischen Bedingungen unter denen Verformung als Prozess auftritt und sich entwickelt. Per definitionem sind einfache Scherung und reine Scherung also **Verformungsregime**.

Reine Scherung: Koaxiale Verformung

Koaxialer Verformungspfad

Ein **koaxialer** (*coaxial*) Verformungspfad ist ein Verformungspfad, bei dem die Hauptverformungsachsen vor und nach der Verformung zusammenfallen. Sie bleiben während der

ganzen Deformation parallel zu den gleichen Materiallinien (d.h. die Achsen der finiten und der inkrementellen Verformungsellipsen bleiben während der Deformation parallel). Die koaxiale Verformung erfolgt **ohne Rotation** (*irrotational*).
Die 2D koaxiale Verformung wandelt durch homogene Plättung ein Quadrat in ein Rechteck um. Zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrats werden in einer Richtung verkürzt und die anderen zwei Seiten werden senkrecht dazu verlängert. Nach der koaxialen Verformung bleiben die Seiten des Rechtecks parallel und senkrecht.



In 3D wird ein Gesteinswürfel in einer Richtung verkürzt und in der Senkrechtrichtung verlängert. Der Würfel wird in einen Quader umgewandelt, während die Seiten des Quaders durch die ganz Deformation hindurch parallel bleiben, d.h. die Seiten des abschliessenden Quaders sind zu den Seiten des ursprünglichen Würfels parallel. Die Orientierungen der Hauptachsen X, Y und Z haben sich während der homogenen Deformation nicht verändert.

Reine Scherung

Wenn die intermediäre Achse Y des Verformungsellipsoides in der Länge konstant bleibt (ebene Verformung), kann die koaxiale Verformung vollständig in der Ebene mit den X- und Z-Achsen beschrieben werden, d.h. das 2D-Quadrat das sich in ein Rechteck verwandelt. Wenn zusätzlich die Fläche des Rechtecks identisch mit der Fläche des ursprünglichen Quadrats ist, ist die konstante Fläche in 2D ein konstantes Volumen in 3D. Eine solche koaxiale und ebene Verformung mit konstantem Volumen, ist die **reine Scherung** (*pure shear*). Beachten Sie, dass alle Ebenen und Linien (mit Ausnahme der wichtigsten Hauptverformungsebenen und -achsen) zur Ebene der maximalen Plättung und zur Linie der maximalen Ausdehnung hindrehen. In diesem Fall:

$$\left(1+\varepsilon_1\right)=1/\left(1+\varepsilon_3\right)$$

Koaxiale Gesamtverformungsellipse

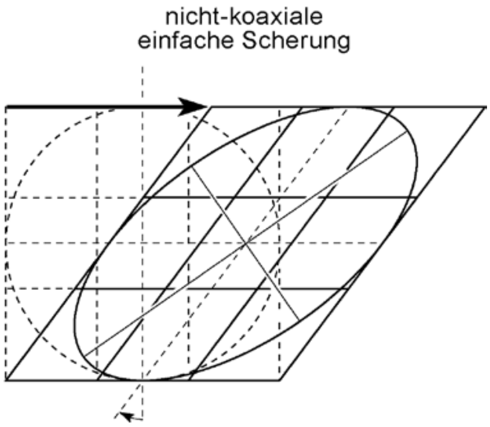
Jedoch kann koaxiale Verformung gleichmässige Dilatation beinhalten.

Einfache Scherung: Nicht-koaxiale Verformung

Nicht-koaxialer Verformungspfad

Ein **nicht-koaxialer** *(non-coaxial)* Verformungspfad definiert sich dadurch, dass sich die Richtungen der Hauptverformungsachsen durch unterschiedliche Materiallinien an jeder infinitesimalen Schrittweite der Verformung drehen: Die nicht-koaxiale Deformation ist gekennzeichnet durch **Rotation** (*rotational deformation).* Die Achsen der finiten und der inkrementellen Verformungsellipsen bleiben nicht parallel.
In 2D, wandelt die nicht-koaxiale Verformung ein Quadrat in ein Parallelogramm um. Zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrats (ursprünglich die beiden vertikalen Seiten) werden nach und nach in eine Richtung geneigt; die anderen zwei (ursprünglich horizontalen) Seiten sind parallel zum Scherpaar und bleiben parallel.
In 3D wird ein Gesteinswürfel in einen Parallelflächner umgewandelt, während die oberen und unteren Seiten des Würfels durch die Deformation parallel bleiben. Die Hauptachsen X und Z rotieren

während der progressiven, homogenen Deformation. Die internediäre Hauptachse Y bleibt parallel zu sich selbst; sie ist eine stabile Richtung während der ganzen einfachen Scherung.



Einfache Scherung

Einfache Scherung *(simple shear)* ist eine nicht-koaxiale, ebene Verformung. Das Volumen und die Länge der intermediäre Achse Y des Verformungsellipsoides bleiben konstant. Einfache Scherung ist dem Prozess analog, der auftritt, wenn ein Kartenstapel nach rechts oder links geschert wird mit jeder dazwischenkommenden, gleich dünnen Karte, die über ihren unteren Nachbar gleitet. Da die Karten sich nicht ausdehnen (ihre kurze Seite ist zu Y parallel), kann man von der Seite (d.h. die Verformungsfläche mit den X- und Z-Achsen) beobachten, was einfache Scherung in zwei Dimensionen ist, mit besonderem Interesse an der Deformation der Materiallinien.
Ein Quadrat (oder Viereck, das durch die Begrenzungen des Kartensatzes definiert ist) das einfacher Scherung unterworfen ist, wird in ein Parallelogramm umgewandelt. Die vertikalen Seiten des Quadrats drehen sich, aber bleiben während der Deformation zueinander parallel. Diese zwei Seiten verlängern sich nach und nach, während die Scherung fortfährt, aber die oberen und unteren Seiten dehnen und verkürzen sich nicht. Stattdessen behalten sie ihre ursprüngliche Länge bei und bleiben zueinander parallel. Diese beständigen Linien, die die Kartenfläche in drei Dimensionen darstellen, sind Richtungen die keine Dehnung aufzeigen (Linien ohne finite Verlängerung). Sie stellen die **Scherrichtung** *(shear direction)* dar, während jede mögliche Karte die **Scherfläche** *(shear plane)* darstellt. Alle Linien, die nicht parallel zur Scherrichtung in der Scherebene sind, rotieren im selben Schersinn zur Scherfläche und Scherrichtung hin.
Merken Sie sich, dass:
- in drei Dimensionen die intermediäre Achse des Verformungsellipsoides Y eine Richtung ohne Änderung der Länge ist, und zu sich selbst parallel bleibt (die frontale Seite der Karten). Es ist eine beständige Richtung während der einfachen Scherdeformation.
- in der einfachen Scherung eine Linie ohne finite Verlängerung oder Verkürzung bereits definiert ist: sie ist örtlich festgelegt und zur Scherfläche parallel; infolgedessen sind die Felder der linearen Verlängerung und Verkürzung asymmetrisch.

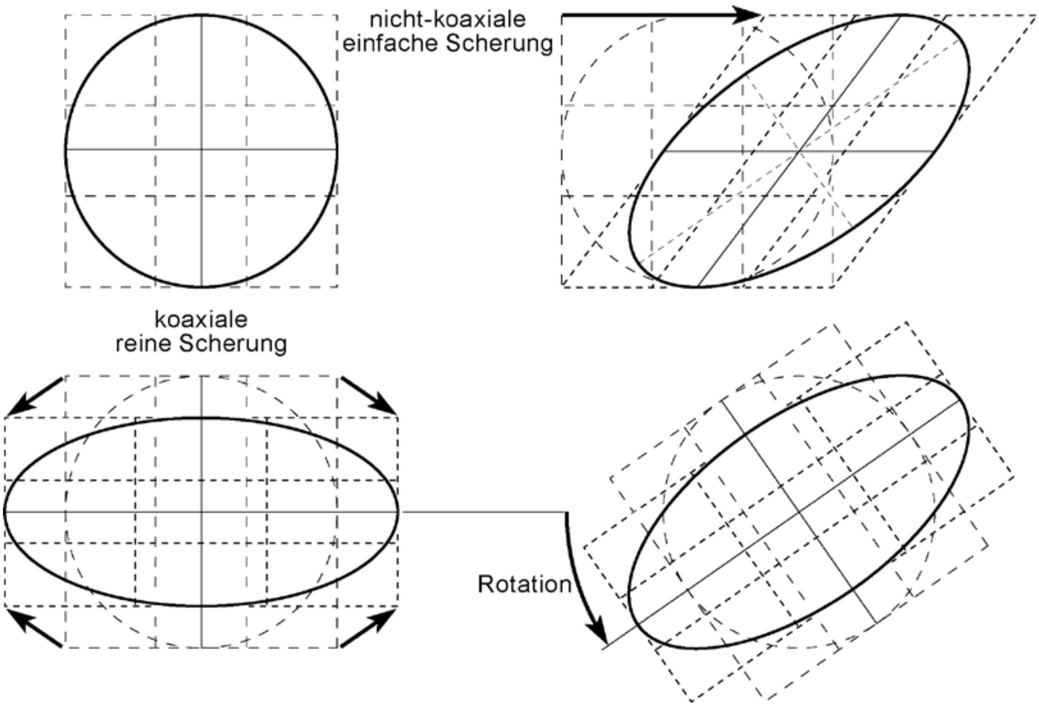
Nicht-koaxiale Gesamtverformungsellipse

Jede beliebige Verformung kann demzufolge in eine Verformungskomponente, die die Form des Ellipsoids misst, und in eine Rotationskomponente, die die interne Rotation der Hauptachsen gegenüber ihren ursprünglichen, unverformten Richtungen misst, unterteilt werden.

Koaxiale / nicht-koaxiale Verformung: Mehrdeutigkeit

Eine Verformung mit Rotation ist mit einer Verformung ohne Rotationskomponente, die mit externer Rotation kombiniert wird, gleichwertig. Folglich kann die Form eines finiten Verformungsellipsoids nicht anzeigen, wie die Verformung tatsächlich entstanden ist.

Da alle Ebenen und Linien (ausser die Hauptverformungsflächen und -achsen) in Richtung der Ebene maximaler Plättung und der Linien maximaler Dehnung für die beiden koaxialen und nicht-koaxialen Deformationen drehen, verschiebt sich bei hoher Verformung alles auf dieselbe Ebene und Linie.



<u>Koaxiale / nicht-koaxiale Verformung: Unterscheidung</u>

Partikelbewegung: symmetrische koaxiale Deformation, asymmetrische nicht-koaxiale Deformation.
Infinitesimale Hauptachsen: parallel und senkrecht in einer koaxialen Verformungszone, geneigt in einer nicht-koaxialen Scherzone.
Finite Hauptverformungsachsen: ortsfeste koaxiale Richtungen, drehende nicht-koaxiale Linien.

Verformungsmarker

Verformungsmarker sind alle möglichen Objekte, deren ursprüngliche Formen in undeformierten Gesteinen entweder weithin bekannt sind oder geschätzt werden können. Angenommen, dass sie sich passiv innerhalb und mit ihrer Matrix verformen, werden ihre Formänderungen die Intensität und das Verformungsregime im Gestein anzeigen. Verformungsanalyse kann an einer Vielzahl von Objekten angewandt werden. Die Grösse der Verformung wird normalerweise gemessen, indem man die ursprüngliche und die neue Form oder Konfiguration vergleicht. Die allgemeinen Formen, die in der Verformungsanalyse verwendet werden, schliessen Kugel, Kreis, Ellipse, und Formen mit oder ohne bilaterale Symmetrie mit ein. Dementsprechend sind die Verformungsindikatoren wie folgt gruppiert:

- Ursprünglich kugelige Objekte (z.B. Ooide, Zylindrische Grabspuren von Würmern, **Reduktionsflecken**: *reduction spots*).
- Ursprünglich ellipsoidale Objekte (z.B. Kiesel, Xenolithe).
- Ursprünglich lineare Objekte (z.B. Belemnite).
- Objekte mit bekannten Winkeln (z.B. Fossilien).
- Gleichmässig verteilte Objekte (z.B. Mittelpunkte von Mineralien, Kieseln).

Einschränkungen und Warnung

Matrix-Objekt Beziehung

Nicht alle verformten Objekte können als absolutes Verformungsmass benutzt werden, weil sich die Matrix einiger Gesteine stärker verformt als die Verformungsmarker. In dieser Hinsicht sind die zuverlässigen Verformungsmarker diejenigen, die die gleiche Kompetenz wie die Gesteinsmatrix haben (z.B. Wurmröhren und Reduktionsflecken), damit sie sich genauso wie das Gestein verformen.

Orientierung der betrachteten Fläche

Die Messungen der Verformung beschäftigen sich häufig mit:
- den Änderungen im Verhältnis einer Länge in Bezug auf eine Länge in eine andere Richtung und
- der Änderung im Winkel zwischen zwei Linien, die zuerst in einem bekannten Winkel zueinander waren.

Die Resultate werden von der Orientierung der betrachteten Flächen beeinflusst. Zusätzlich kann die ursprüngliche Grösse jedes einzelnen Markers unbekannt sein.

Volumenänderungen

Tatsächliche Verformung wird am leichtesten gemessen, wenn die Deformation Volumenkonstant ist. In diesem Fall sind Verkürzungen und Verlängerungen ausgeglichen. Die volumetrische Komponente der Verformung kann nicht ermittelt werden, wenn man eine ursprüngliche Form auf eine abschliessende Form bezieht. Eine weitere Komplikation entsteht, wenn die Volumenverkleinerung während der Deformation nur die Matrix beeinflusst, ohne die Verformungsmarker zu beeinflussen.

Die Volumenänderung $1+\Delta_V$ ergibt sich aus $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$.

Ursprünglich kugelige Objekte: Direkte Messung von elliptischen Objekten

Die einfachste Technik um die volumenkonstante Verformung zu messen, benutzt zuerst kugelförmige Marker, die im Querschnitt eine Kreisform ergeben. Diese Sphären werden zu Ellipsoiden verformt und geben elliptische Querschnitte, deren Achsen die Achsen des Verformungsellipsoids sind. Mit der Kombination der axialen Verhältnisse von Querschnitten mit verschiedenen Orientierungen, kann die dreidimensionale, volumenkonstante Verformung des Gesteins bestimmt werden. In der Praxis ist die ursprüngliche Form der kugelförmigen Verformungsmarker wie Ooide nicht tadellos kugelförmig, und die Deformation schwankt von Punkt-zu-Punkt. So enthält ein verformter oolitischer Kalkstein eine Vielzahl von Grössen und Formen der Verformungsellipsoide, und viele von ihnen müssen gemessen werden, um eine durchschnittliche Verformung des Gesteins ableiten zu können.

Ursprünglich zylindrische Objekte: Direkte Messung der Elongation

Manchmal sind lineare Objekte vorhanden aus denen dann die ursprüngliche Länge vor der Deformation wieder rekonstruiert werden kann. Zum Beispiel können steife längliche Objekte wie Belemnite und Turmalin Kristalle während der Verlängerung einer Boudinage unterzogen werden.
Die ursprüngliche Länge des Objektes kann festgestellt werden, indem man einfach die Längen aller Fragmente zusammenzählt. Die abschliessende Länge kann direkt gemessen werden, und die Dehnung ℓ / ℓ_0 kann berechnet werden.

Die Annahmen dieser Methode sind:
- Es gibt keine Verzerrung der Boudins;
- Die Trennung der Boudins stellt die gesamte Verlängerung dar.

Wenn diese Annahmen erfüllt sind, können durch diese Methode theoretisch die Dilatations- und die Formänderungskomponenten der Verformungsellipse erhalten werden.
Sobald mehrere Objekte gemessen worden sind, können ihre Orientierungen und Längen grafisch in Radialkoordinaten dargestellt werden. Eine Ausgleichsellipse kann unter Verwendung eines Satzes elliptischer Schablonen geschätzt werden. Theoretisch kann ein Minimum von drei Punkten die Ellipse begrenzen, aber mehr Punkte sind ratsam.

Objekte mit bekannten Winkeln: Mohrkreis und Wellman Methode

Verformung von Fossilien

Fossilien haben häufig eine bilaterale Symmetrie, mit bekannten eckigen Verhältnissen und Grössenverhältnissen, die eine gegebene Spezies verkörpern. Wenn ihre ursprüngliche Form bekannt ist und wenn viele von ihnen im Aufschluss vorhanden sind, können Fossilien als Verformungsmarker benutzt werden.

Fry Methode: Mitte-zu-Mitte Abstand

Verformungsmarker in Gesteinen können zu stark sein um sich mit ihrer Matrix homogen zu verformen. Beispiele sind Kiesel in einer weichen Matrix, Sandkörner, Ooide, Porphyroklaste, usw. Die Formen dieser Objekte können nicht verwendet werden, um die Verformung festzustellen. Stattdessen ist es möglich, ihren Abstand zu verwenden, wenn die Objekte vor der Deformation gleichmässig in alle Richtungen (z.B. eng gepackte kreisförmige Körner oder Ooide) verteilt waren und keine bevorzugte Formorientierung hatten. Stellen Sie sich vor, dass die Form von unverformten Objekten durch ihren Mittelpunkt dargestellt werden kann. Der kleinste Abstand zwischen zwei Mittelpunkten zweier benachbarter Objekte vor der Deformation war in alle Richtungen gleich, wenn die Korngrösse und Kornverteilung isotrop war. Dann definieren die Mindestabstände zwischen den Mittelpunkten einen Kreis um jede mögliche Kornmitte. Dieser Kreis wird durch homogene Deformation entlang der Achsen der Verformungsellipse verkürzt oder ausgedehnt. So stehen die Abstände zwischen den Zentren der Marker im Zusammenhang mit der Orientierung und Form des Verformungsellipsoids. Eine wichtige Annahme ist, dass die Verformungsmarker während der Verformung nicht übereinander geschoben wurden.

Verfahren

- Zeichnen Sie zwei orthogonale Linien, die sich in der Mitte eines Transparentpapiers schneiden. Setzen Sie den Ursprung über die Mitte eines Objekts.
- Markieren Sie die Mittelpunkte aller nahe gelegenen Objekte.
- Verschieben Sie das Transparentpapier (ohne es zu drehen) auf das folgende Objekt. Wiederholen Sie das Verfahren.
- Wiederholen Sie das Verfahren für alle Objekte.
- Nachdem eine genügende Anzahl von Objekten nachgezeichnet worden ist (gewöhnlich > 50), erscheint um den Bezugsschnittpunkt ein freie Stelle. Die Form dieser freien Stelle ist die Form der Verformungsellipse.

Rf/φ Methode: Verformte Gerölle

Die R_f/ϕ-Methode ist ein praktisches Werkzeug für die Ermittlung der Verformung von ursprünglich elliptischen Objekten wie Kieseln. In einem bestimmten Gesteinsabschnitt ist R_f das Verhältnis der langen, zur kurzen Achse eines verformten elliptischen Objekts. Dieses Verhältnis kann als eine Kombination des Anfangsverhältnisses (Elliptizität) R_i des gemessenen elliptischen Objektes und des axialen Verhältnisses R_s der Verformungsellipse gesehen werden.

ϕ ist der $\pm 90°$-Winkel zwischen der langen Achse des elliptischen Objektes und einer willkürlichen Bezugslinie.

Verfahren

Die Darstellung des Achsenverhältnisses (R_f) zur Orientierung (ϕ) ergibt eine Wolke von Datenpunkten, die die Addition der ursprünglichen ellipsoidalen Form des Objekts und des Endzustands des Verformungsellipsoids widerspiegelt. Die Orientierung der X-Achse in Bezug auf die Referenzlinie wird durch die Position von R_f -max bestimmt und die Y-Achse steht senkrecht zur X-Achse in der Schnittfläche. Die Auswertung der Punktstreuung in R_f/ϕ Plots wird durch Referenzkurven, die als Folienüberlagerung auf den Daten verwendet werden, stark erleichtert.

Finite Verformung und Versetzung: Mathematische Beschreibung

Deformation beschreibt die Änderung der relativen Position der Materialpunkte, die einen Körper bilden. Ein Weg, jede mögliche Deformation zu kennzeichnen ist, dass jedem Punkt eines Körpers ein Versatzvektor in einem kartesischen Koordinatensystem zugewiesen wird. Der Versatzvektor verbindet die Position des betrachteten Punktes in seiner (i.Allg. ursprünglichen) Referenzposition mit seiner Position im verformten Zustand. Dies ist ein direktes Problem, in welchem die Variablen Materialkoordinaten sind. Man kann auch Raumkoordinaten verwenden, um die ursprüngliche Form zu rekonstruieren; dies ist ein inverses Problem.

Versatz in 2-Dimensionen

Skript N. Mancktelow

Koordinaten

Der Materialpunkt P_0 mit ursprünglichen, materiellen Koordinaten (x_0, y_0) wird nach der Deformation zum Punkt P_1, mit räumlichen Koordinaten (x_1, y_1), verschoben. Für eine zweidimensionale, homogene Deformation eines inkompressiblen Körpers wird die Verlagerung von P_0 zu P_1 mathematisch durch eine Koordinatentransformationsgleichung beschrieben:
Um diese zu bekommen, schreiben wir die Tabelle:

	x_0	y_0
x_1	a	b
y_1	c	d

und erhalten die Gleichungen:

$$x_1 = a x_0 + b y_0$$
$$y_1 = c y_0 + d y_0$$

$(x_1; y_1)$ sind die neuen Koordinaten des Punktes nach der Versetzung, d.h. Deformation.

Deformationsmatrix

Die mathematische Grundlage für die 2D grafische Darstellung der endlichen Verformung als Verformungsellipse und Mohr‘scher Verformungskreis ist eine 2 x 2 Matrix von Zahlen, die als Deformationsgradienttensor, einfacher **Deformationsmatrix** *(deformation matrix),* bekannt ist.
Ein Vektor ist eine einspaltige Matrix. Wenn ein Vektor die Koordinaten eines Punktes im Raum darstellt, kann Matrixmultiplikation verwendet wird, um diesen Punkt an eine neue Position zu transformieren:

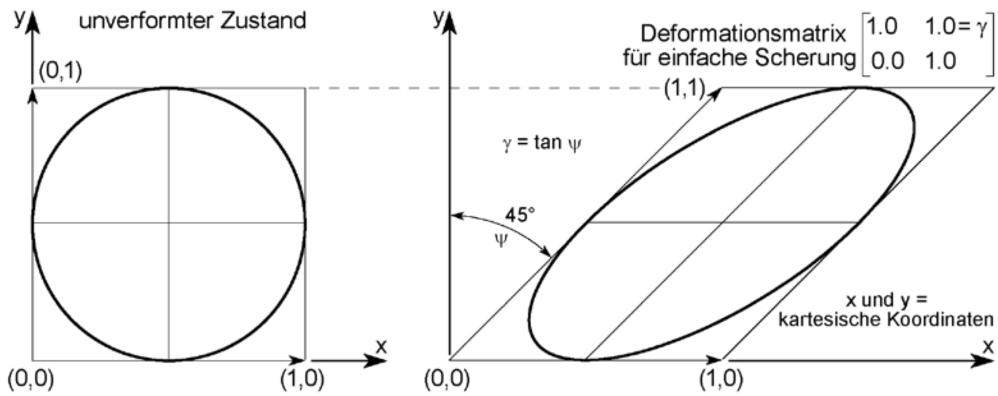
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

wobei die Matrix in dieser Gleichung **Deformationsmatrix** heisst und für infinitesimale und homogene Verformung gültig ist:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

Diese allgemeine Transformationsgleichung wird in einer vereinfachten Form geschrieben:

$$\mathbf{D} x_0 = x_i$$



Visualisierung einer Deformationsmatrix (Deformationsgradienttensor) in zwei Dimensionen

<u>Erinnerung</u>

Die Matrix-Multiplikation ist wie folgt:

$$\begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx}b_{xx} + a_{xy}b_{yx} & a_{xx}b_{xy} + a_{xy}b_{yy} \\ a_{yx}b_{xx} + a_{xx}b_{yx} & a_{yx}b_{xy} + a_{xx}b_{xx} \end{bmatrix}$$

Wie bei der Spannungsnotation bedeutet der erste tiefgestellte Index "wirkt auf einer Ebene orthogonal zur Achse des Index", der zweite tiefgestellte Index "parallel zur tiefgestellten Achse orientiert".

Im Allgemeinen kann man die Art der Verformung, die durch eine Deformationsmatrix repräsentiert wird, visualisieren, indem man sich ihre Wirkung auf ein Einheitsquadrat vorstellt. Die beiden Spalten der Deformationsmatrix stellen die Ziele der beiden gegenüberliegenden Ecken (1,0) und (0,1) des ursprünglichen, unverformten Quadrats dar.

Die Dilatation (Gleichung 7) ist gegeben durch:

$$1 + \Delta = ad - bc$$

Die Rotationskomponente der Verformung ist gegeben durch:

$$\tan\omega = (b - c)/(a + d)$$

Von der Verformungsellipse bis zur Verformungsmatrix

Von der Verformungsmatrix bis zur Verformungsellipse

Einige Sonderfälle

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Die Matrix, in der sich nichts ändert.

$\begin{bmatrix} 1+\Delta & 0 \\ 0 & 1+\Delta \end{bmatrix}$ Die Matrix, die nur eine Volumenänderung beschreibt.

$\begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$ Eine Drehung im Uhrzeigersinn um den Ursprung

$\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Eine einfache Scherung parallel zu x

Bewegungskomponenten

Ein Verschiebungsvektor $\vec{d}$ verbindet P_0 und P_1. Dieser Vektor beschreibt möglicherweise nicht genau den Weg, auf dem P_0 zu P_1 gelangt ist. Er identifiziert nur die Anfangs-und Endposition des betrachteten Punkts, aber kann selbst die Summe mehrerer kleiner Vektoren sein.
Allgemeine homogene Deformation ist eine Kombination von drei Arten von Bewegung: (1) Translation (2) Rotation und (3) Verzerrung.

<u>Translation</u>

Ein Feld von parallelen und gleich orientierten Vektoren mit konstanter Länge verschiebt den Körper ohne innere Deformation:

$$x = x_0 + A$$

$$y = y_0 + B$$

Da die Verschiebung gleichförmig ist, bewegt sich der Körper ohne innere Verformung.

<u>Rotation</u>

Der Körper wird um den Winkel ω rotiert. Alle Vektoren verändern sich gleichmässig sowohl in ihrer Länge als auch in ihrer Richtung, ohne jedoch den Körper zu verformen. Es gibt Rotation im Uhrzeigersinn:

$$x = x_0 \cos\omega + y_0 \sin\omega$$

$$y = -x_0 \sin\omega + y_0 \cos\omega$$

und Rotation im Gegenuhrzeigersinn:

$$x = x_0 \cos\omega - y_0 \sin\omega$$

$$y = -x_0 \sin\omega + y_0 \cos\omega$$

Reine Scherung

Einfache Scherung

Allgemeine, homogene Festkörperdeformation mit Rotation

Allgemeine heterogene Deformation

Vortizität

Die **Vortizität** *(vorticity)* ist eine mathematische Formulierung der Rotationsrate von flüssigen Teilchen, die in einem Wirbel mitgerissen werden. Die Achse, um welche die Teilchen drehen, trägt den Vortizitätsvektor, dessen Grösse der Winkelgeschwindigkeit der Drehung entspricht.
In der reinen Scherung gibt es für jede Linie, die im Uhrzeigersinn rotiert, eine Linie die sich genau mit demselben Winkel entgegen des Uhrzeigersinns dreht; die durchschnittliche Rotation ist somit Null. Wenn die Deformation nicht-koaxial ist, rotieren alle Materiallinien um die intermediäre Verformungsachse. Die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Materiallinien ist die **innere Vortizität**, die ein Vektor parallel zur Y-Achse ist. Die innere Vortizität wird durch die kinematische Vortizitätszahl W quantifiziert. In nicht-komprimierbaren Materialen ist diese Zahl das Verhältnis der Winkelrotation (in Radiant) zur Verlängerung entlang der X-Achse. In zwei Dimensionen ist die Vortizität auch der Kosinus des Winkels zwischen den Strömungsasymptoten. Dieses Mass für die Grösse der Rotation in Bezug auf die Verzerrung ergibt ein Mass der Nicht-Koaxialität:
W = 0 für reine Scherung, die koaxiale Verformung.
W = 1 für einfache Scherung, die nicht-koaxiale Verformung.
Die Vortizität variiert zwischen 0 und 1 für die allgemeine Verformung.

ACHTUNG:
Wenn sich ein Körper während der Deformation dreht, hat die Vortizität zwei Komponenten: die durch Scherung verursachte Vortizität und die **Drehbeschleunigung** *(spin)*, die die Rotation (Drehung) der Verformungsachsen ist.

Fliesslinien

Eine weitere nützliche Methode, um die Deformationsgeschichte anzuzeigen ist das Beschreiben von Fliesslinien

.

Bei koaxialer reiner Scherung ist Fliessen entlang der Verformungsachsen geradeaus nach innen oder aussen. Die Verformungsachsen wirken als Fliessasymptoten. Sie stimmen auch mit den Eigenvektoren der Deformationsmatrix überein.

Bei nicht-koaxialem Fliessen, fallen die Fliessasymptoten in der Regel nicht mit den Verformungsachsen zusammen, auch wenn sie mit den Eigenvektoren der Deformationsmatrix übereinstimmen. Bei einfacher Scherung gibt es nur eine Asymptote.

Typischerweise konvergiert das Fliessen gegen eine der Verformungsasymptoten. Wenn die Verformung gross wird (z.B. in einem Mylonit), nähert sich die X-Achse dieser Asymptote, und alle planaren und linearen Gefügeelemente neigen dazu, auf dieser Linie zusammenzulaufen.

Versatz in 3-Dimensionen

Skript N. Mancktelow

Der Punkt P_0 hat die ursprünglichen, materiellen Koordinaten (x_0, y_0, z_0). Nach der Deformation verschiebt sich P_0 zum Punkt P_1, dessen räumlichen Koordinaten (x_1, y_1, z_1) sind.

Wie für eine zwei-dimensionale, homogene Deformation eines inkompressiblen Körpers wird die Verlagerung von P_0 zu P_1 durch eine Koordinatentransformationsgleichung mathematisch beschrieben.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a x_0 + b y_0 + c z_0 \\
y_1 &= d x_0 + e y_0 + f z_0 \\
z_1 &= g x_0 + h y_0 + i z_0
\end{aligned}
$$

Was in Matrixform geschrieben wird:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}
$$

wo die Verformungsmatrix **D** für infinitesimale oder homogene Verformung ist:

$$
\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}
$$

Dieser Tensor zweiter Ordnung ist symmetrisch, was bedeutet, dass es drei Orientierungen (die drei diagonalen Komponenten) gibt, für welche es keine Scherverformung gibt. Eine vektorielle Quantität mit den drei kartesischen Komponenten $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ parallel zu den x-, y- und z-Koordinaten, definiert den Versatz des materiellen Punktes P. Bei infinitesimalen Verformungsproblemen können die Verschiebungskomponenten als linear und ununterbrochen innerhalb des kontinuierlichen

Körpers angenommen werden. Daher sind die vektoriellen Komponenten differenzierbar in Bezug auf die Koordinatenachsen.

Experimentelle Rheologie und Verformung

Stoffgesetze des duktilen Gesteinsfliessens beschreiben die Beziehungen zwischen Spannungen und Deformationsraten, nicht die finite Verformung. Dies hat wichtige Implikationen. Verformte Gesteine zeigen eine endliche Deformationsform, welche die Summe aller Deformationen ist, die das Gestein erlebt hat. Da die Verformungsrate im Wesentlichen die inkrementelle Verformung pro Zeiteinheit ist und da die Verformungsellipsoide keinerlei Informationen über den Verformungsweg, d.h. die inkrementellen Verformungsellipsoide, liefern, können duktile Deformationsstrukturen nicht direkt in Bezug auf die Spannungsrichtung interpretiert werden. Kurz gesagt, die Annahme, dass die maximale Verkürzungsrichtung der finiten Verformung parallel zu der maximalen Druckspannung ist, ist ein grosser Fehler.

Zusammenfassung

Verformung ist die Änderung der Form eines Körpers resultierend aus der Deformation infolge angewandter Spannung. Verformung beinhaltet Volumenänderungen (Dilatation oder Kompaktion), Längenänderungen (Verlängerung oder Verkürzung) und Winkeländerungen (Scherbelastung). Verformungszustände können durch drei aufeinander senkrecht stehende Hauptverformungsachsen charakterisiert werden: gewöhnlich ist $X > Y > Z$. Der Geologe analysiert den langfristigen kumulativen Effekt der Deformation, also die finite Verformung. Für die Verformungsanalyse sind Abschätzungen an den verschiedenen Punkten eines Gesteinskörpers, der Form und der Orientierung des finiten Verformungsellipsoids nötig. Ähnliche Formen können durch unterschiedliche Deformationsmechanismen entstehen.

Empfohlene Literatur

Means W. D. 1976. *Stress and strain. Basic concepts of continuum mechanics for geologists*. Springer Verlag, New York. 339 p.

Ramsay J. G. 1967. *Folding and fracturing of rocks*. McGraw-Hill, New-York. 568 p.

Ramsay J. G. & Huber M. I. 1983. *The techniques of modern structural geology - Volume1 : Strain analysis*. Academic Press, London. 307 p.

Ramsay J. G. & Huber M. I. 1987. *The techniques of modern structural geology - Volume2 : Folds and fractures*. Academic Press, London. 700 p.